

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TÔN THẮT QUỐC TẤN

CHẶN TRÊN CHO MỘT SỐ BẤT BIẾN
CỦA VÀNH VÀ IDEAN PHÂN BẬC

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HUẾ, 2025

ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TÔN THẮT QUỐC TẤN

CHẶN TRÊN CHO MỘT SỐ BẤT BIẾN
CỦA VÀNH VÀ IDEAN PHÂN BẠC

CHUYÊN NGÀNH: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
MÃ SỐ: 9460104

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

CÁN BỘ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. CAO HUY LINH

HUẾ, 2025

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Những kết quả viết chung với các tác giả khác đã được các đồng tác giả cho phép khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Tôn Thất Quốc Tấn

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến Thầy tôi, PGS. TS. Cao Huy Linh. Tôi đã được Thầy hướng dẫn từ khi học thạc sĩ đến nghiên cứu sinh. Thầy đã luôn chỉ bảo, nhắc nhở và động viên tôi từ những điều đơn giản nhất khi tôi tập bước chân vào công việc nghiên cứu. Thầy đã luôn hỗ trợ và tạo điều kiện cho tôi về nhiều mặt trong cuộc sống. Luận án này không thể hoàn thành nếu không có sự hướng dẫn tận tâm của thầy. Một lần nữa, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc của mình đến Thầy Cao Huy Linh.

Tôi xin chân thành cảm ơn GS. TS. Lê Văn Thuyết và nhóm nghiên cứu mạnh Đại số giao hoán và kết hợp, đã hỗ trợ và tạo điều kiện cho tôi tham gia sinh hoạt và báo cáo các kết quả của mình trong suốt thời gian nghiên cứu sinh.

Tôi xin chân thành cảm ơn Khoa Toán và phòng đào tạo Sau đại học, Trường Đại học sư Phạm, Đại học Huế đã tạo điều kiện khi tôi học tập và làm việc tại Khoa và Trường.

Tôi xin chân thành cảm ơn PGS. TS. Đoàn Thế Hiếu, khoa Toán, Trường Đại học Sư Phạm Huế và TS. Nguyễn Phước Thể, khoa MT và KHTN, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng đã hỗ trợ và giúp đỡ tôi trong thời gian đầu nghiên cứu sinh.

Tôi xin chân thành cảm ơn TS. Văn Đức Trung và TS. Trần Quang Hóa, khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Huế với những buổi seminar và thảo luận giúp tôi học hỏi được nhiều kiến thức trong Đại số Giao hoán.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn vô hạn đến Bố, Mẹ và những người thân, đặc biệt là Vợ của mình đã luôn yêu thương, cổ vũ, động viên, chăm lo chu đáo để tôi an tâm học tập và nghiên cứu. Tác giả dành bản luận án này tặng cho con gái của mình, Pi, vừa bước qua 5 tuổi.

Ngày 18 tháng 11 năm 2024.

Tác giả

Tôn Thất Quốc Tấn

Mục lục

Mở đầu	6
1 Các kiến thức chuẩn bị	16
1.1 Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford	16
1.2 Hàm Hilbert, hàm Hilbert-Samuel và chỉ số chính quy	17
1.2.1 Hàm Hilbert và hệ số Hilbert của môđun phân bậc . . .	17
1.2.2 Vành và môđun phân bậc liên kết	19
1.3 Phần tử siêu bề mặt	20
1.4 Hệ tham số chuẩn tắc	22
1.5 Bậc đồng điều	23
1.6 Hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu liên kết với môđun Artin . . .	25
2 Chặn cho các hệ số Hilbert	28
2.1 Dấu các hệ số Hilbert của iđêan m-nguyên sơ	28
2.2 Chặn cho các hệ số Hilbert của iđêan tham số	34
2.3 Kết luận Chương 2	37
3 Nhiều của iđêan trong vành địa phương	38
3.1 Chặn tuyến tính cho chỉ số nhiều Hilbert	38
3.2 Nhiều của hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu	46
3.3 Kết luận Chương 3	54
4 Chỉ số chính quy của iđêan khử liên kết với đồ thị	56
4.1 Iđêan khử liên kết với đồ thị	56
4.2 Chỉ số chính quy của iđêan khử liên kết với đồ thị	58
4.3 Kết luận Chương 4	75
Kết luận	76
Danh mục các công trình của tác giả	78
Tài liệu tham khảo	79

Mở đầu

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford là một bất biến quan trọng cung cấp nhiều thông tin về độ phức tạp của những cấu trúc đại số phân bậc. Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford xuất hiện trong công trình về đường cong xạ ảnh của Castelnuovo [8] và được Mumford [41] phát biểu định nghĩa đầu tiên cho đa tạp xạ ảnh.

Giả sử $S = k[x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức n biến $x_1, \dots, x_n$ trên trường k và E là S -môđun phân bậc hữu hạn sinh, theo định lý xoắn của Hilbert tồn tại giải thức tự do phân bậc tối thiểu của E có độ dài hữu hạn

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{\beta_q} S(-d_{qj}) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{\beta_{q-1}} S(-d_{(q-1)j}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{\beta_0} S(-d_{0j}) \longrightarrow E \longrightarrow 0. \quad (1)$$

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của E được định nghĩa là số

$$\text{reg}(E) = \max\{d_{ij} - i \mid i = 0, \dots, q \text{ và } j = 1, \dots, \beta_i\}.$$

Từ định nghĩa này ta biết được chỉ số chính quy của E là chặn trên cho tất cả các bậc sinh của các môđun xoắn (syzygy) của E [15]. Đó là một ý nghĩa quan trọng của chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford. Hơn nữa, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của E là chặn trên cho bậc cực đại của một hệ sinh tối thiểu thuần nhất của E . Nếu S không là vành đa thức trên một trường thì giải thức tự do (1) không nhất thiết có độ dài hữu hạn. Khi đó, bằng ngôn ngữ đối đồng điều địa phương, khái niệm chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford được định nghĩa cho môđun phân bậc hữu hạn sinh trên đại số phân bậc chuẩn bất kỳ [44]. Nếu $E = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n$ là môđun phân bậc hữu hạn sinh trên một đại số phân bậc chuẩn $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ thì chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford $\text{reg}(E)$ của E được định nghĩa là số m nhỏ nhất sao cho $H_{S_+}^i(E)_n = 0$ với mọi $n \geq m - i + 1$ và $i \geq 0$, trong đó $H_{S_+}^i(E)$ là đối đồng điều địa phương của E với giá $S_+ = \bigoplus_{n > 0} S_n$.

Một khái niệm liên quan chặt chẽ với chỉ số chính quy là hàm Hilbert-Samuel. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và J là idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R . Nếu M là R -môđun hữu hạn sinh thì *môđun phân bậc liên kết của M ứng với J* là

$$G_J(M) = \bigoplus_{n \geq 0} J^n M / J^{n+1} M.$$

Đặc biệt $G(J) := G_J(R)$ là vành phân bậc chuẩn và gọi là *vành phân bậc liên kết của R ứng với J* . Như đã biết $G_J(M)$ là $G(J)$ -môđun phân bậc hữu hạn sinh và $J^n M / J^{n+1} M$ là R/J -môđun có độ dài hữu hạn với mọi $n \geq 0$. Ta định nghĩa *hàm Hilbert-Samuel của M ứng với J* là hàm số học

$$H_{J,M}(n) = \lambda(M/J^{n+1}M) = \sum_{j=0}^n \lambda(J^j M / J^{j+1} M)$$

với mọi $n \geq 0$, trong đó $\lambda(\bullet)$ là độ dài của R -môđun. Samuel đã chứng minh tồn tại một đa thức $P_{J,M}(x) \in \mathbb{Q}[x]$ có bậc $d = \dim(M)$ sao cho $H_{J,M}(n) = P_{J,M}(n)$ với mọi $n \gg 0$. Đa thức $P_{J,M}(x)$ được biểu diễn dưới dạng

$$P_{J,M}(x) = \sum_{i=0}^d (-1)^i e_i(J, M) \binom{x+d-i}{d-i}.$$

Các số nguyên $e_i(J, M)$ được gọi là *hệ số Hilbert của M ứng với J* . Đặc biệt, $e(J, M) := e_0(J, M)$ được gọi là *số bội của M ứng với J* và $e_1(J, M)$ được gọi là *hệ số Chern của M ứng với J* . Khi $M = R$ ta sẽ kí hiệu $e_i(J) := e_i(J, R)$. Số n lớn nhất sao cho $H_{J,M}(n) \neq P_{J,M}(n)$ được gọi là *chỉ số Hilbert của M ứng với J* .

Mục đích của luận án là nghiên cứu các chặn trên cho một số bất biến của vành và idêan phân bậc. Tuy phần lớn kết quả của chúng tôi đạt được là trong vành địa phương, nhưng phương pháp mà chúng tôi sử dụng liên quan đến đại số Rees và vành phân bậc liên kết. Nội dung của luận án được tập trung vào ba hướng chính.

Hướng thứ nhất là thiết lập các chặn cho các hệ số Hilbert. Các hệ số Hilbert cung cấp cho chúng ta các thông tin về cấu trúc của vành và môđun đang xét. Đầu tiên, chúng tôi xét tính không dương của các hệ số Hilbert. Liên quan đến bài toán xét dấu của các hệ số Hilbert, Vasconcelos [69] đã gọi $e_1(J)$ là hệ số Chern và đưa ra một số giả thuyết

về hệ số này. Một trong các giả thuyết đó là giả thuyết về tính âm của hệ số Chern của ideal tham số: "*Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương. Khi đó, R là vành không Cohen-Macaulay khi và chỉ khi hệ số Chern của mọi ideal tham số của vành R đều âm*". Năm 2010, Goto [19] cùng với nhóm nghiên cứu của ông đã giải quyết thành công giả thuyết này. Nếu R là vành Noether địa phương bất kì, Mandal-Singh-Verma [39] đã chứng minh một tính chất đáng chú ý là $e_1(Q) \leq 0$ với mọi ideal tham số Q của R . Nếu $\text{depth}(R) \geq d - 1$ thì McCune [40] đã chứng minh $e_2(Q) \leq 0$ và Saikia-Saloni [54] đã chứng minh $e_3(Q) \leq 0$. Trong khi đó các hệ số Hilbert khác có thể dương. Tuy nhiên, nếu thêm giả thiết độ sâu của vành phân bậc liên kết lớn hơn hoặc bằng $d - 2$ thì Saika-Saloni [54] và Linh-V. D. Trung [36] đã chứng minh $e_i(Q) \leq 0$ với mọi $i = 1, \dots, d$. Từ những kết quả trên, ta quan sát thấy đáng điệu của các hệ số Hilbert $e_i(Q)$ với Q là ideal tham số phụ thuộc vào độ sâu của vành phân bậc liên kết $G(Q)$. Nếu J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ, chúng ta chưa biết nhiều thông tin về dấu của các hệ số Hilbert của nó. Để thực hiện công việc này, chúng ta xét đại lượng $\sigma(J^k) = \text{depth}(G(J^k))$ với $k \in \mathbb{N}$, Elias [17] đã chứng minh khi $k \gg 0$ thì $\sigma(J^k)$ là hằng số và được kí hiệu bởi $\sigma(J)$ (độ sâu vành phân bậc liên kết ứng với lũy thừa đủ lớn của ideal J). Với điều kiện $\sigma(J) \geq d - 2$ và số mũ rút gọn $r(J) \leq 2$, chúng ta thu được kết quả về tính không dương của hệ số Hilbert cuối cùng của J như sau.

Định lý 2.1.3 *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 2$ và $\text{depth}(R) \geq d - 1$. Giả sử J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R sao cho $r(J) \leq d - 1$. Nếu $\sigma(J) \geq d - 2$ thì $e_d(J) \leq 0$.*

Định lý 2.1.3 cho chúng ta biết về tính không dương của hệ số Hilbert cuối cùng của ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ J , tuy nhiên các hệ số Hilbert khác có thể dương (xem Ví dụ 2.1.8). Nếu $\text{depth}(G(J)) \geq d - 2$ và số mũ rút gọn $r(J) \leq 2$, chúng ta thu được tính không dương của các hệ số Hilbert khác như sau.

Định lý 2.1.9 *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $\dim(R) = d \geq 3$ và $\text{depth}(R) \geq d - 1$. Giả sử J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R sao cho*

$r(J) \leq 2$. Nếu $\text{depth}(G(J)) \geq d - 2$ thì

$$e_i(J) \leq 0 \text{ với } i = 3, \dots, d.$$

Để ý rằng $\sigma(J) \geq \text{depth}(G(J))$ nên Định lý 2.1.3 là một sự mở rộng các kết quả trước đó của Puthenpurakal [47, Theorem 9.1], Saikia-Saloni [54, Corollary 3.2] và Linh-V. D. Trung [36, Theorem 2.9].

Như đã biết, chỉ số chính quy của vành phân bậc liên kết là một chặn trên cho chỉ số Hilbert, khi chúng ta đã chặn được cho chỉ số Hilbert thì có thể chặn cho các hệ số Hilbert bằng một phương pháp đã đưa ra bởi Rossi, Valla và Vasconcelos [53]. Bài toán tìm các chặn cho các hệ số Hilbert theo các bất biến thông dụng thu hút sự quan tâm của một số nhà toán học. Nếu R là vành Cohen-Macaulay và Cohen-Macaulay suy rộng, Srinivas và Trivedi [59, 63] đã đưa ra chặn cho các hệ số Hilbert của ideal m -nguyên sơ theo chiều và số bội. Nếu R là vành bất kì thì Rossi, Trung và Valla [51] đã thiết lập chặn cho các hệ số Hilbert của ideal cực đại theo chiều và bậc mở rộng. Sau đó, Linh [31] đã mở rộng kết quả của Rossi, Trung và Valla [51] sang cho lớp ideal m -nguyên sơ. Goto và Ozeki [21] đã thiết lập chặn phổ dụng cho các hệ số Hilbert của ideal tham số trong vành Cohen-Macaulay suy rộng. Gần đây, Dũng và Hoa [12] đã thiết lập chặn cho các hệ số Hilbert $e_{d-t+1}(J), e_{d-t+2}(J), \dots, e_d(J)$ theo $e(J), e_1(J), \dots, e_{d-t}(J)$ với $t = \text{depth}(R) \geq 1$ và $d = \dim R$. Chặn của Dũng và Hoa [12] thu được phụ thuộc vào số bội $e(J)$. Vậy một câu hỏi tự nhiên đặt ra như sau.

Câu hỏi 1. *Giả sử (R, m) là vành Noether địa phương chiều d với $\text{depth} R = t$ và J là ideal m -nguyên sơ của R . Liệu rằng có tồn tại chặn cho các hệ số Hilbert $e_{d-t+1}(J), \dots, e_d(J)$ theo $e_1(J), \dots, e_{d-t}(J)$ và chặn này không phụ thuộc vào số bội $e(J)$ không?*

Nếu $J = Q$ là ideal tham số của R và $\text{depth} R = d - 1$, thì Câu hỏi 1 trở thành bài toán tìm chặn cho các hệ số Hilbert $e_2(Q), \dots, e_d(Q)$ theo hệ số Chern $e_1(Q)$ và không phụ thuộc vào số bội $e(Q)$. Các kết quả trong [19, 20] đã chứng tỏ hệ số Chern $e_1(Q)$ là một hệ số quan trọng và phản ánh nhiều thông tin của vành và môđun. Sử dụng chặn cho chỉ số chính quy của vành phân bậc liên kết ứng với ideal tham số Q trong [32] và

phương pháp của Rossi, Valla và Vasconcelos [53], chúng ta thu được chặn cho $e_2(Q), \dots, e_d(Q)$ theo $e_1(Q)$ không phụ thuộc $e(Q)$.

Định lý 2.2.4 *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 2$ và $\text{depth}(R) \geq d - 1$. Nếu Q là idêan tham số của R thì*

$$|e_i(Q)| \leq 3 \cdot 2^{i-2} r^{i-1} |e_1(Q)| \text{ với } i = 2, \dots, d,$$

trong đó, $r = \max\{[-4e_1(Q)]^{(d-1)!} + e_1(Q) - 1, 0\} + 1$.

Hướng tiếp theo mà chúng tôi quan tâm là bài toán nhiều của idêan trong vành Noether địa phương. Giả sử J là idêan bất kỳ của vành Noether địa phương $(R, \mathfrak{m})$ và $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan của R sinh bởi dãy $f_1, \dots, f_r$. Idêan $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$ được gọi là *nhiều J -adic của I* nếu $f'_i \equiv f_i \pmod{J^n}$ với $i = 1, \dots, r$ và n đủ lớn. Nếu $J = \mathfrak{m}$ thì nhiều $\mathfrak{m}$ -adic của I được gọi là *nhiều bé của I* . Kết quả đầu tiên liên quan đến bài toán nhiều được nghiên cứu bởi Samuel [55] vào năm 1956. Samuel [55] đã chứng minh nếu $f \in R = k[[x_1, \dots, x_d]]$ là một siêu mặt với kì dị cô lập, tức là idêan Jacobian $J(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ là idêan $(x_1, \dots, x_d)$ -nguyên sơ, thì với mọi f' thỏa mãn $f' \equiv f \pmod{(x_1, \dots, x_d)J(f)^2}$, ta có $R/(f) \cong R/(f')$. Sau đó kết quả của Samuel [55] được mở rộng bởi một số tác giả [24, 10, 11, 42, 22]. Nếu R/I và R/I' không đẳng cấu, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra.

Câu hỏi 2. *Những tính chất hoặc bất biến nào được bảo toàn qua nhiều của I ?*

Eisenbud [14] chứng minh nếu $f_1, \dots, f_r$ là dãy chính quy của R thì $f'_1, \dots, f'_r$ cũng là dãy chính quy của R . Sau đó, Huneke và Trivedi [28] đã mở rộng kết quả này cho dãy lọc chính quy.

Một bất biến khác quan trọng thu hút được nhiều nhà toán học quan tâm là hàm Hilbert-Samuel. Nếu J là idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ thì số nguyên N nhỏ nhất sao cho hàm Hilbert-Samuel của R/I và R/I' ứng với J bằng nhau, tức là

$$\lambda(R/I + J^n) = \lambda(R/I' + J^n)$$

với mọi $n \geq 0$ và $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$, trong đó $f'_i \equiv f_i \pmod{J^N}$ với $i = 1, \dots, r$, được gọi là *chỉ số nhiều Hilbert của I ứng với J* , kí hiệu bởi $N(I, J)$. Nếu R là vành Cohen-Macaulay suy rộng và I sinh bởi dãy lọc chính quy, Srinivas và Trivedi [57] đã chứng minh hàm Hilbert-Samuel của R/I

bảo toàn dưới nhiều bé của I . Srinivas và Trivedi [57] chỉ ra rằng điều kiện I sinh bởi dãy lọc chính quy là không thể bỏ được và họ đặt ra giả thuyết liệu rằng có thể bỏ đi điều kiện R là vành Cohen-Macaulay suy rộng hay không? Năm 2020, Ma, Quý và Smirnov [37] đã giải quyết thành công giả thuyết của Srinivas và Trivedi. Cụ thể hơn, Ma, Quý và Smirnov [37] đã chứng minh hàm Hilbert-Samuel của R/I ứng với J được bảo toàn qua nhiều bé của I , với giả thiết $I + J$ là idêan m -nguyên sơ. Năm 2023, Quý và N. V. Trung [49] bằng một tiếp cận khác, đã chứng minh $G_J(R/I) \cong G_J(R/I')$ với J là idêan bất kì và I sinh bởi dãy J -lọc chính quy. Các chặn cho chỉ số nhiều Hilbert trong [57] và [37] là không tường minh. Tuy nhiên, nếu R là vành Cohen-Macaulay và I sinh bởi dãy chính quy thì Srinivas và Trivedi [58] đã thiết lập một chặn tuyến tính cho $N(I, m)$ theo số bội của R/I . Sau đó, Quý và V. D. Trung [48] đã mở rộng kết quả của Srinivas và Trivedi [58] cho lớp vành Cohen-Macaulay suy rộng, tức là thiết lập chặn tuyến tính của $N(I, m)$ theo bậc mở rộng của R/I . Đến đây, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra như sau, đề xuất bởi Quý và N. V. Trung [49, Question 4.9].

Câu hỏi 3. *Giả sử (R, m) là vành Noether địa phương bất kì và J là idêan m -nguyên sơ. Xét $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan của R sinh bởi dãy lọc chính quy. Khi đó, có tồn tại chặn trên tuyến tính cho chỉ số nhiều Hilbert $N(I, J)$ theo bậc mở rộng $D(J, R/I)$ hay không?*

Sử dụng phương pháp của Quý và V. D. Trung [48] và thiết lập một chặn trên cho chỉ số rút gọn $r(J, R/I)$ theo bậc đồng điều $\text{hdeg}(J, R/I)$, chúng ta thu được kết quả sau.

Định lý 3.1.8 *Giả sử (R, m) là vành Cohen-Macaulay suy rộng chiều d và J là idêan m -nguyên sơ của R . Xét $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan của R sinh bởi dãy lọc chính quy $f_1, \dots, f_r$ của R . Đặt $s = d - r$ và*

$$N = \max\{s \cdot \text{hdeg}(J, R/I) - 2s + 1, 0\} + (s + 1)I(R) + 2.$$

Khi đó,

$$\lambda(R/(I + J^n)) = \lambda(R/(I' + J^n))$$

với mọi $n \geq 0$ và $I' = (f_1, \dots, f'_r)$, trong đó $f'_i \equiv f_i \pmod{J^n}$ với $i = 1, \dots, r$.

Với cách nhìn đối ngẫu, chúng tôi quan tâm đến bài toán bảo toàn

hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu liên kết với môđun Artin qua nhiều của idêan. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun Artin, giả sử J là idêan của R sao cho $\lambda(0 :_A J) < \infty$. Chúng ta định nghĩa *hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu của J liên kết với A*

$$H'_{J,A}(n) = \lambda(0 :_A J^n)$$

với mọi $n \geq 0$. Câu hỏi mà chúng tôi quan tâm liên quan đến hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu như sau.

Câu hỏi 4. *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun Artin. Xét $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan sinh bởi dãy lọc A -đối chính quy $f_1, \dots, f_r$ và J là idêan của R sao cho $\lambda(0 :_A J) < \infty$. Có tồn tại hay không số tự nhiên N sao cho nếu với mọi $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$, trong đó $f'_i \equiv f_i \pmod{J^N}$ với $i = 1, \dots, r$ thì*

$$\lambda(0 :_A (I, J^n)) = \lambda(0 :_A (I', J^n))$$

với mọi $n \geq 0$?

Kết quả chính mà chúng ta thu được là định lý sau đây.

Định lý 3.2.7 *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun đối Cohen-Macaulay với $\text{Ndim } A = d$. Xét $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan của R sinh bởi dãy A -đối chính quy $f_1, \dots, f_r$. Giả sử J là idêan của R sao cho $\lambda(0 :_A J) < \infty$. Đặt $\overline{A} = 0 :_A I$ và*

$$N = r'(J, \overline{A}) + 2,$$

trong đó, $r'(J, \overline{A})$ là số mũ rút gọn của J liên kết với $\overline{A}$. Giả sử $f'_i = f_i + \varepsilon_i$, với ε_i là phần tử bất kì trong J^N , với mọi $i = 1, \dots, r$ và $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$. Khi đó,

$$\lambda(0 :_A (I, J^n)) = \lambda(0 :_A (I', J^n))$$

với mọi $n \geq 0$.

Hướng cuối cùng mà chúng tôi nghiên cứu là chỉ số chính quy của lớp idêan khử liên kết với đồ thị. Khái niệm idêan khử liên kết với đồ thị được giới thiệu bởi Anwar và Khalid [4]. Cho $G = (V, E)$ là đồ thị hữu hạn, đơn, liên thông với $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ là tập đỉnh và E là tập cạnh của nó. *Bậc* của một đỉnh v_i là số cạnh đi qua đỉnh đó, được kí hiệu bởi $\deg(v_i)$. *Đỉnh trội* của G là đỉnh có bậc lớn nhất. *Đỉnh cô lập* của G là

đỉnh có bậc bằng không. Câu hỏi tự nhiên đặt ra: "*Số đỉnh trội cần bỏ đi một cách đệ quy để thu được các đồ thị con không chứa đỉnh cô lập là bao nhiêu?*". Anwar và Khalid [4] đã giới thiệu phương pháp để trả lời cho câu hỏi trên và được gọi là *phương pháp DVE* (Dominating Vertex Elimination Method). Áp dụng phương pháp DVE đệ quy chúng ta thu được dãy liên tiếp các đồ thị con của G có dạng

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r. \quad (2)$$

Số nguyên r lớn nhất trong dãy (2) được gọi là *chỉ số ổn định bậc* (Graphical Degree Stability) của đồ thị G . Nếu đồ thị G có chỉ số ổn định bậc là r , thì mỗi đồ thị con $G_i (i = 1, \dots, r)$ trong dãy (2) có tập đỉnh $V_i = \{v_1, \dots, v_{n-i}\}$ được đánh nhãn lại sao cho $d_1 \geq \cdots \geq d_{n-i}$ với $d_i = \deg(v_i)$. Giả sử $R = k[x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường k , chúng ta định nghĩa *idêan dãy* (sequential ideal) của G_i là $Q_{G_i} = (x_1^{d_1}, \dots, x_{n-i}^{d_{n-i}})$ với $i = 0, \dots, r$. Khi đó, *idêan khử* của G được xác định như sau

$$I_D(G) = \bigcap_{i=0}^r Q_{G_i}.$$

Một idêan khử là idêan kiểu Borel. Chỉ số chính quy của idêan kiểu Borel được nghiên cứu trong [3, 4, 9]. Anwar và Khalid [4] đã thiết lập các chặn tổ hợp cho chỉ số chính quy của idêan khử liên kết với một số lớp đồ thị như đồ thị đầy đủ, đồ thị hình sao, đồ thị đường, đồ thị chu trình, đồ thị hình quạt, đồ thị bàn bẻ, đồ thị bông tuyết, đồ thị hai thành phần đầy đủ. Sử dụng phương pháp của Anwar và Khalid [4], chúng tôi nghiên cứu chỉ số chính quy của idêan khử liên kết với một số lớp đồ thị phức tạp và tổng quát hơn. Chúng ta thu được một số kết quả sau.

Định lý 4.2.5 *Giả sử $T_{m,n}$ là đồ thị nòng nọc với $m \geq 3, n \geq 2$. Khi đó,*

$$\text{reg}(I_D(T_{m,n})) \leq m + n + 1.$$

Định lý 4.2.11 *Giả sử $D_n^{(m)}$ là đồ thị cối xay gió Hà Lan với $n \geq 3$ và $m \geq 2$. Khi đó,*

$$\text{reg}(I_D(D_n^{(m)})) \leq (n + 1)m.$$

Định lý 4.2.18 *Giả sử $W_n^{(m)}$ là đồ thị cối xay gió với $n \geq 3$ và $m \geq 2$. Khi*

đó,

$$\operatorname{reg}(I_D(W_n^{(m)})) \leq m(n-1)^2.$$

Định lý 4.2.25 *Giả sử G là đồ thị n -tạ với $n \geq 3$. Khi đó,*

$$\operatorname{reg}(I_D(G)) \leq 2(n-1)^2 + 1.$$

Phương pháp chính mà chúng ta sử dụng là xây dựng các idêan dãy của các đồ thị con trong dãy (2) ứng với các đồ thị ở các Định lý 4.2.5, Định lý 4.2.11, Định lý 4.2.18, Định lý 4.2.25. Sau đó, ta chứng minh các idêan dãy này là ổn định (xem Định nghĩa 4.1.5) và áp dụng [16, Proposition 1.2] để thiết lập các chặn trên cho chỉ số chính quy của các idêan khử tương ứng.

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận án được chia làm bốn chương.

Trong Chương 1, chúng tôi trình bày lại các khái niệm và tính chất cơ bản về chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford, hàm Hilbert của vành phân bậc, hàm Hilbert-Samuel và các hệ số Hilbert-Samuel, phân tử siêu bề mặt và một số tính chất, bậc mở rộng và bậc đồng điều, hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu liên kết với môđun Artin, làm cơ sở cho việc trình bày kết quả chính của luận án ở các chương tiếp theo.

Trong Chương 2, chúng tôi chứng minh tính không dương của các hệ số Hilbert của idêan m -nguyên sơ với một số điều kiện của đại lượng $\sigma(J)$ (Định lý 2.1.3, Định lý 2.1.9) và thiết lập các chặn cho các hệ số Hilbert $e_2(Q), \dots, e_d(Q)$ của idêan tham số Q theo hệ số Chern $e_1(Q)$ và chiều $\dim R$ với giả thiết $\operatorname{depth}(R) \geq \dim R - 1$ (Định lý 2.2.4).

Trong Chương 3, chúng tôi thiết lập chặn tuyến tính cho chỉ số nhiều Hilbert $N(I, J)$ theo bậc mở rộng $\operatorname{hdeg}(J, R/I)$ (Định lý 3.1.8) và chứng minh sự bảo toàn của hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu của idêan liên kết với môđun đối Cohen-Macaulay (Định lý 3.2.7).

Trong Chương 4, chúng tôi trình bày các khái niệm cơ bản về lý thuyết đồ thị cần dùng để định nghĩa idêan khử liên kết với đồ thị, phương pháp DVE, chỉ số ổn định bậc của đồ thị. Từ đó, chúng tôi tính toán chỉ số ổn định bậc của một số lớp đồ thị và thiết lập chặn cho chỉ số chính quy của idêan khử liên kết với đồ thị nòng nọc (tadpole) (Định lý 4.2.5), đồ thị cối xay gió Hà Lan (Dutch windmill) (Định lý 4.2.11),

đồ thị cối xay gió (windmill) (Định lý 4.2.18) và đồ thị n -tạ (n -barbell) (Định lý 4.2.25).

Chương 1

Các kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng ta sẽ nhắc lại các kiến thức cơ sở về chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc, hàm Hilbert, hàm Hilbert-Samuel, hệ số Hilbert-Samuel, phần tử siêu bề mặt, hệ tham số chuẩn tắc, bậc đồng điều và hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu liên kết với môđun Artin, làm cơ sở cho việc trình bày kết quả chính của luận án ở các chương tiếp theo.

1.1 Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford

Ta luôn giả sử $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_n$ là đại số phân bậc chuẩn trên vành địa phương Artin S_0 và $S_+ = \bigoplus_{i > 0} S_n$. Cho E là S -môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều d . Ta kí hiệu $H_{S_+}^i(E)$ là môđun đối đồng điều địa phương thứ i của E với giá S_+ (xem định nghĩa và các tính chất trong [6]).

Từ [6, Proposition 15.1.5], tồn tại số nguyên r sao cho $H_{S_+}^i(E)_n = 0$ với mọi $i \geq 0$ và mọi $n \geq r$, do đó ta đặt

$$a_i(E) = \begin{cases} \max\{n \mid H_{S_+}^i(E)_n \neq 0\} & \text{nếu } H_{S_+}^i(E) \neq 0, \\ -\infty & \text{nếu } H_{S_+}^i(E) = 0. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.1.1. *Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford* (ngắn gọn hơn gọi là *chỉ số chính quy*) của E , kí hiệu $\text{reg}(E)$, là số được xác định

$$\text{reg}(E) := \max\{a_i(E) + i \mid i \geq 0\}.$$

Nếu S là một đại số phân bậc chuẩn trên trường k thì S có thể được biểu diễn dưới dạng $S := R/I$, trong đó $R = k[X]$ là vành đa thức trên trường k và I là ideal thuần nhất của R . Khi đó, E có thể xem như một

môđun trên R . Theo định lý xoắn của Hilbert, tồn tại giải thức tự do tối tiểu phân bậc của E có dạng

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{\beta_q} R(-d_{qj}) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{\beta_{q-1}} R(-d_{(q-1)j}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{\beta_0} R(-d_{0j}) \longrightarrow E \longrightarrow 0,$$

trong đó d_{ij} là bậc của các phần tử trong một hệ sinh tối tiểu thuần nhất của môđun xoắn thứ i . Eisenbud và Goto [15] đã thiết lập mối liên hệ giữa các số d_{ij} và chỉ số chính quy như sau.

Định lý 1.1.2 ([15, Proposition 1.1 và Theorem 1.2]). *Giả sử $S = R/I$ với R là vành đa thức trên trường k và I là iđêan thuần nhất của R . Khi đó*

$$\text{reg}(E) = \max\{d_{ij} - i \mid i = 0, \dots, q \text{ và } j = 1, \dots, \beta_i\}.$$

Trong trường hợp này, Định lý 1.1.2 chỉ ra rằng $\text{reg}(E)$ là một chặn trên cho tất cả các bậc sinh của các môđun xoắn của E . Đây là một ý nghĩa rất quan trọng của chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford. Ta biết rằng bậc cực đại của một hệ sinh tối tiểu thuần nhất của E là một bất biến, kí hiệu $d(E)$. Định lý sau đây cho ta một chặn trên của bất biến này.

Định lý 1.1.3 ([6, Theorem 15.3.1]). *Giả sử $S = R/I$ với R là vành đa thức trên trường k và I là iđêan thuần nhất của R . Khi đó*

$$d(E) \leq \text{reg}(E).$$

Ví dụ 1.1.4. Cho vành $R = k[x, y, z]$ và $I = (x^2z, xyz, yz^6)$. Sử dụng Macaulay 2, giải thức tự do tối tiểu của R/I được xác định như sau

$$0 \rightarrow F_2 = R(-4) \oplus R(-8) \xrightarrow{f_2} F_1 = R(-3)^2 \oplus R(-7) \xrightarrow{f_1} F_0 = R = R(0) \xrightarrow{f_0} R/I \rightarrow 0.$$

Suy ra $\text{reg}(R/I) = 6$.

1.2 Hàm Hilbert, hàm Hilbert-Samuel và chỉ số chính quy

1.2.1 Hàm Hilbert và hệ số Hilbert của môđun phân bậc

Trong phần này, $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ là vành phân bậc Noether với S_0 là vành địa phương Artin. Giả sử $E = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n$ là môđun phân bậc hữu hạn sinh

chiều d . Ta biết rằng với mỗi $n \in \mathbb{Z}$, E_n là S_0 -môđun và $\lambda(E_n) < \infty$, trong đó $\lambda(\bullet)$ là độ dài của S_0 -môđun.

Định nghĩa 1.2.1. *Hàm Hilbert* của môđun phân bậc E là hàm số học $H_E : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ được xác định bởi

$$H_E(n) = \lambda(E_n).$$

Nếu E là S -môđun phân bậc hữu hạn sinh có chiều $d \geq 1$ thì tồn tại một đa thức $P_E(x) \in \mathbb{Q}[x]$ có bậc $d - 1$ sao cho $H_E(n) = P_E(n)$ với n đủ lớn. Đa thức $P_E(x)$ được gọi là *đa thức Hilbert* của E và được viết dưới dạng

$$P_E(x) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i e_i(E) \binom{x+d-i-1}{d-i-1},$$

trong đó, $e_i(E)$ là các số nguyên với $i = 0, \dots, d-1$ và $e_0(E) > 0$, được gọi là các *hệ số Hilbert* của E . Khi đó, *số bội* của E được định nghĩa như sau:

$$e(E) := \begin{cases} e_0(E), & \text{nếu } d > 0 \\ \lambda(E), & \text{nếu } d = 0. \end{cases}$$

Nếu E là môđun phân bậc Cohen-Macaulay thì $e(E)$ và $\text{reg}(E)$ có mối quan hệ sau đây.

Bổ đề 1.2.2 ([31, Lemma 2.2]). *Nếu E là môđun phân bậc Cohen-Macaulay sao cho $d(E) \leq 0$ thì*

$$\text{reg}(E) \leq e(E) - 1,$$

với $d(E)$ là bậc cực đại của một hệ sinh tối tiểu thuần nhất của E .

Công thức liên hệ giữa đa thức Hilbert, hàm Hilbert và đối đồng điều địa phương của môđun phân bậc được cho bởi định lý sau.

Định lý 1.2.3 ([7, Theorem 4.3.5]). *Với mọi n ta có,*

$$H_E(n) - P_E(n) = \sum_{i=0}^d (-1)^i \lambda(H_{S_+}^i(E)_n). \quad (1.2.1)$$

Công thức (1.2.1) được gọi là *công thức Serre*.

Nếu $m = \text{reg}(E)$ thì theo định nghĩa của chỉ số chính quy $H_{S_+}^i(E)_n = 0$ với mọi $n \geq m + 1$. Từ Định lý 1.2.3, ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 1.2.4. $H_E(n) = P_E(n)$ với mọi $n \geq \text{reg}(E) + 1$.

1.2.2 Vành và môđun phân bậc liên kết

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ và M là R -môđun hữu hạn sinh. Ta kí hiệu

$$G_J(M) = \bigoplus_{n \geq 0} J^n M / J^{n+1} M,$$

được gọi là *môđun phân bậc liên kết* của M ứng với J . Đặc biệt, $G(J) := G_J(R)$ là vành phân bậc chuẩn trên vành địa phương Artin R/J và được gọi là *vành phân bậc liên kết* của R ứng với J . Do $\lambda(J^n M / J^{n+1} M) < \infty$ với mọi $n \geq 0$, theo tính chất của độ dài môđun

$$\lambda(M / J^{n+1} M) = \sum_{i=0}^n \lambda(J^i M / J^{i+1} M) < \infty,$$

chúng ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.2.5. *Hàm Hilbert-Samuel của M ứng với J là hàm số học được xác định như sau*

$$H_{J,M}: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto H_{J,M}(n) = \begin{cases} \lambda(M / J^{n+1} M) & \text{nếu } n \geq 0, \\ 0 & \text{nếu } n < 0. \end{cases}$$

Samuel đã chứng minh tồn tại một đa thức $P_{J,M}(x) \in \mathbb{Q}[x]$ có bậc $d = \dim(M)$ sao cho $H_{J,M}(n) = P_{J,M}(n)$ với mọi $n \gg 0$. Đa thức $P_{J,M}(x)$ được gọi là *đa thức Hilbert-Samuel của M ứng với J* và được biểu diễn dưới dạng

$$P_{J,M}(x) = \sum_{i=0}^d (-1)^i e_i(J, M) \binom{x+d-i}{d-i}.$$

Các số nguyên $e_i(J, M)$ được gọi là *hệ số Hilbert-Samuel của M ứng với J* . Đặc biệt, $e(J, M) := e_0(J, M)$ được gọi là *số bội Hilbert-Samuel của M ứng với J* và $e_1(J, M)$ được gọi là *hệ số Chern của M ứng với J* . Khi $M = R$, chúng ta sẽ kí hiệu $e_i(J) := e_i(J, R)$.

Định nghĩa 1.2.6. Số nguyên n_0 lớn nhất sao cho $H_{J,M}(n_0) \neq P_{J,M}(n_0)$ được gọi là *chỉ số Hilbert của M ứng với J* , kí hiệu $n(J, M)$.

Bổ đề sau đây cho ta một chặn trên về chỉ số Hilbert $n(J, M)$.

Bổ đề 1.2.7 ([31, Lemma 3.4]). *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ và M là R -môđun hữu hạn sinh. Khi đó,*

$$n(J, M) \leq \text{reg}(G_J(M)).$$

Idêan $K \subseteq J$ được gọi là *rút gọn* của J ứng với M nếu tồn tại một số nguyên không âm n sao cho $J^{n+1}M = KJ^nM$. Một rút gọn K của J ứng với M được gọi là *rút gọn tối thiểu* nếu nó không thực sự chứa một rút gọn nào khác của J . Nếu K là rút gọn tối thiểu của J ứng với M thì số mũ rút gọn của J ứng với M đối với K được định nghĩa là

$$r_K(I, M) = \min\{n \geq 0 \mid J^{n+1}M = KJ^nM\}.$$

Số mũ rút gọn của J ứng với M là

$$r(J, M) = \min\{r_K(I, M) \geq 0 \mid K \text{ là rút gọn tối thiểu của } J \text{ ứng với } M\}.$$

Bổ đề sau chỉ ra mối quan hệ giữa chỉ số rút gọn của J và chỉ số chính quy của $G(J)$.

Bổ đề 1.2.8 ([65, Proposition 3.2]). *Giả sử K là một rút gọn tối thiểu của J . Khi đó,*

$$a_d(G(J)) + d \leq r_K(J) \leq \text{reg}(G(J)).$$

1.3 Phân tử siêu bề mặt

Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, J là ideal của R và M là R -môđun hữu hạn sinh. Trong phần này, chúng ta sẽ nhắc lại khái niệm phân tử siêu bề mặt và các tính chất quan trọng của nó, được áp dụng trong các chương tiếp theo.

Định nghĩa 1.3.1. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, J là ideal của R và M là R -môđun hữu hạn sinh. Phân tử $x \in J \setminus \mathfrak{m}J$ được gọi là *siêu bề mặt* của M ứng với J nếu tồn tại $c \in \mathbb{N}$ sao cho

$$(J^n M : x) \cap J^c M = J^{n-1} M$$

với mọi $n > c$. Dãy các phân tử $x_1, \dots, x_r \in J \setminus \mathfrak{m}J$ được gọi là *dãy siêu bề mặt* của M ứng với J nếu x_i là phân tử siêu bề mặt của M ứng với $J/(x_1, \dots, x_{i-1})$ với mọi $i = 1, \dots, r$.

Nhận xét 1.3.2. Lưu ý rằng, phần tử siêu bề mặt ở Định nghĩa 1.3.1 không phải luôn tồn tại. Tuy nhiên, nếu R có trường thặng dư vô hạn thì nó luôn tồn tại (xem [70, p.288, Remarks about lemma 5(2)]). Để vượt qua hạn chế này, khi cần thiết, ta dùng mở rộng phẳng trung thành $R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ ($R[X]$ là vành đa thức). Do đó, ta luôn có thể giả sử R có trường thặng dư vô hạn và khi đó phần tử bề mặt luôn tồn tại.

Chúng ta trình bày bổ đề sau thường được sử dụng.

Bổ đề 1.3.3. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và M là R -môđun hữu hạn sinh. Giả sử $x \in J \setminus \mathfrak{m}J$ là phần tử siêu bề mặt của M ứng với J . Khi đó, với $n \gg 0$ ta có

- (i) $xM \cap J^n M = xJ^{n-1}M$;
- (ii) $J^{n+1}M : x = J^n M + (0 :_M x)$;
- (iii) $(0 :_M x) \cap J^n M = 0$.

Chứng minh. (i) Xem [66, Lemma 4.4].

(ii) Xem [31, Lemma 3.1].

(iii) Xem [66, Lemma 4.6]. □

Từ Bổ đề 1.3.3, ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 1.3.4. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và M là R -môđun hữu hạn sinh. Giả sử $x \in J \setminus \mathfrak{m}J$ là phần tử siêu bề mặt của M ứng với J . Khi đó, với $n \gg 0$

$$J^{n+1}M : x / J^n M \cong (0 :_M x).$$

Phần tử siêu bề mặt là công cụ quan trọng cho phép chúng ta nghiên cứu hàm Hilbert-Samuel và các hệ số Hilbert-Samuel, nó hữu ích trong phép chứng minh quy nạp từ chiều một đến chiều cao hơn.

Bổ đề 1.3.5 ([52, Proposition 1.2]). Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, J là idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R và M là R -môđun hữu hạn sinh chiều $d \geq 1$. Nếu $x \in J \setminus \mathfrak{m}J$ là phần tử siêu bề mặt của M ứng với J và $\overline{M} = M/xM$ thì

- (i) $\dim \overline{M} = d - 1$ và $\lambda(0 :_A x) < \infty$;
- (ii) $e_i(J, M) = e_i(J, \overline{M})$ với mọi $i = 0, \dots, d - 2$;
- (iii) $e_{d-1}(J, M) = e_{d-1}(J, \overline{M}) + (-1)^d \lambda(0 :_M x)$.

1.4 Hệ tham số chuẩn tắc

Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và M là R -môđun hữu hạn sinh. Với mỗi iđêan tham số Q của M , ta có $\lambda(M/QM) - e(Q, M) \geq 0$. Đặt

$$I(Q, M) = \lambda(M/QM) - e(Q, M)$$

và

$$I(M) = \sup\{I(Q, M) \mid Q \text{ là iđêan tham số của } M\}$$

được gọi là *bất biến Buchsbaum* của M .

Định nghĩa 1.4.1. Một R -môđun M được gọi là *Cohen-Macaulay suy rộng* nếu $I(M) < \infty$. Vành R được gọi là Cohen-Macaulay suy rộng nếu nó là R -môđun Cohen-Macaulay suy rộng.

Chúng ta có thể đặc trưng về tính Cohen-Macaulay suy rộng của một môđun dựa vào các môđun đối đồng điều địa phương với giá $\mathfrak{m}$.

Tính chất 1.4.2 ([2, (3.3) và (3.7)]). R -môđun M là Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi $\lambda(H_{\mathfrak{m}}^i(M)) < \infty$ với mọi $i = 0, \dots, \dim M - 1$, trong đó $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là môđun đối đồng điều địa phương của M với giá $\mathfrak{m}$. Hơn nữa,

$$I(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \lambda(H_{\mathfrak{m}}^i(M)).$$

Định nghĩa 1.4.3. Giả sử J là iđêan bất kì của R , dãy các phần tử $f_1, \dots, f_r$ được gọi là M -dãy J -lọc chính quy nếu

$$f_i \notin \mathfrak{p} \text{ với mọi } \mathfrak{p} \in \text{Ass}(M/(f_1, \dots, f_{i-1})M) \setminus V(J)$$

với mọi $i = 1, \dots, r$. Đặc biệt, khi J là iđêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ thì ta nói $f_1, \dots, f_r$ là dãy M -lọc chính quy.

Nếu M là R -môđun hữu hạn sinh và J là iđêan của vành Noether địa phương $(R, \mathfrak{m})$, ta định nghĩa *độ dài J -Loewy* của M

$$a_J(M) := \inf\{n \mid J^n M = 0\}.$$

Chúng ta trình bày một số tiêu chuẩn tương đương về phần tử lọc chính quy.

Bổ đề 1.4.4. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và M là R -môđun hữu hạn sinh. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

- (i) $f_1, \dots, f_r$ là M -dãy J -lọc chính quy;
- (ii) $a_J \left(\frac{(f_1, \dots, f_{i-1})M : f_i}{(f_1, \dots, f_{i-1})M} \right) < \infty$ với mọi $i = 1, \dots, r$;
- (iii) $(f_1, \dots, f_{i-1})M : f_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (f_1, \dots, f_{i-1})M : J^n$ với mọi $i = 1, \dots, r$.

Chứng minh. Tương tự chứng minh [65, Lemma 2.1]. □

Sử dụng khái niệm dãy M -lọc chính quy, chúng ta có thể đưa ra đặc trưng khác cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng.

Bổ đề 1.4.5 ([2, (3.3)]). M là R -môđun Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi mỗi hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ của M là dãy M -lọc chính quy.

Chúng ta biết rằng,

$$I(Q, M) \leq I(M)$$

với mọi idêan tham số Q của M . Khi dấu bằng xảy ra, chúng ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.4.6 ([64, Theorem 2.1]). Idêan tham số Q của môđun Cohen-Macaulay suy rộng M được gọi là *idêan tham số chuẩn* của M nếu $I(Q, M) = I(M)$.

Nếu M là R -môđun Cohen-Macaulay suy rộng, theo [64, Proposition 2.10] ta luôn chọn được hệ tham số chuẩn tắc chứa trong $\mathfrak{m}^t$ với $t \gg 0$.

Hệ quả 1.4.7. Giả sử M là R -môđun Cohen-Macaulay suy rộng, nếu $Q \subseteq \mathfrak{m}^t$ với $t = I(M)$ thì Q là idêan tham số chuẩn tắc.

1.5 Bậc đồng điều

Để mô tả độ phức tạp của cấu trúc các vành và môđun không Cohen-Macaulay, Vasconcelos et al. [67] đã đưa ra khái niệm bậc mở rộng ứng với idêan cực đại. Sau đó, Linh [31] đã mở rộng khái niệm này cho lớp idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ. Kí hiệu $\mathcal{M}(R)$ là phạm trù các R -môđun hữu hạn sinh.

Định nghĩa 1.5.1. *Bậc mở rộng* trên $\mathcal{M}(R)$ ứng với idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ J là hàm số học $D(J, \bullet)$ sao cho với mọi môđun M , các tính chất sau đúng.

- (i) $D(J, M) = D(J, M/L) + \lambda(L)$ với L là môđun con cực đại của M có độ dài hữu hạn;
- (ii) $D(J, M) \geq D(J, M/xM)$ với x là phần tử tổng quát của M ứng với J ;
- (iii) $D(J, M) = e(J, M)$ nếu M là môđun Cohen-Macaulay.

Nếu $J = \mathfrak{m}$ thì $D(J, M) = D(M)$, trùng với bậc mở rộng của Vasconcelos [67] định nghĩa ban đầu.

Một ví dụ mẫu mực về bậc mở rộng là *bậc đồng điều*, được định nghĩa như sau: với mỗi $j \in \mathbb{Z}$, đặt

$$M_j = \text{Hom}_R(H_{\mathfrak{m}}^j(M), E),$$

trong đó $E = E_R(R/\mathfrak{m})$ là bao nội xạ của $R/\mathfrak{m}$. Khi đó, theo Định lý đối ngẫu Matlis M_j là R -môđun hữu hạn sinh với chiều $\dim M_j \leq j$. Với mỗi R -môđun hữu hạn sinh M chiều $\dim M = s$ và mỗi idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ J của R , *bậc đồng điều* $\text{hdeg}(J, M)$ của M ứng với J được định nghĩa theo quy nạp như sau:

$$\text{hdeg}(J, M) = \begin{cases} \lambda(M) & \text{nếu } s \leq 0; \\ e(J, M) + \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \text{hdeg}(J, M_i) & \text{nếu } s > 0. \end{cases}$$

Bậc đồng điều của môđun M ứng với idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ J được giới thiệu bởi [31], một khái niệm tổng quát của khái niệm bậc đồng điều $\text{hdeg}(M)$ đã được định nghĩa trước đó bởi [67]; tức là,

$$\text{hdeg}(\mathfrak{m}, M) = \text{hdeg}(M).$$

Giả sử R là ảnh đồng cấu của vành Gorenstein S với $\dim S = n$ và $M \in \mathcal{M}(R)$ với $\dim M = d$, khi đó bậc đồng điều của M ứng với J được định nghĩa theo một cách khác như sau.

$$\text{hdeg}(J, M) = \begin{cases} \lambda(M) & \text{nếu } d \leq 0; \\ e(J, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \text{hdeg}(J, \text{Ext}_S^{n-i}(M, S)) & \text{nếu } d > 0. \end{cases}$$

Chúng ta có thể kiểm tra $\text{hdeg}(J, M)$ là một bậc mở rộng của M ứng với J (xem [67] cho trường hợp $J = \mathfrak{m}$). Trường hợp đặc biệt, khi M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng thì

$$\text{hdeg}(J, M) = e(J, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \lambda(H_{\mathfrak{m}}^i(M)).$$

1.6 Hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu liên kết với môđun Artin

Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun Artin. Chúng ta đã quen thuộc với khái niệm chiều Krull của môđun hữu hạn sinh. Đối với môđun Artin, Robert [50] đã xây dựng khái niệm chiều Krull của môđun Artin, để tránh nhầm lẫn với khái niệm chiều Krull của môđun hữu hạn sinh, Kirby [30] đã đổi tên gọi thành chiều Noether của môđun Artin.

Định nghĩa 1.6.1 ([50, Proposition 2]). Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun Artin. Khi đó, *chiều Noether của A* được định nghĩa

$$\text{Ndim}(A) = \inf\{t \geq 0 \mid \text{tồn tại } x_1, \dots, x_t \in \mathfrak{m} \text{ sao cho } \lambda(0 :_A (x_1, \dots, x_t)) < \infty\}.$$

Từ Định nghĩa 1.6.1, ta có

Định nghĩa 1.6.2. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun Artin với $\text{Ndim}(A) = d$. Dãy $x_1, \dots, x_d \subseteq \mathfrak{m}$ được gọi là *hệ tham số của A* nếu $\lambda(0 :_A (x_1, \dots, x_d)) < \infty$. Idêan sinh bởi hệ tham số của A được gọi là *idêan tham số của A* .

Giả sử J là một idêan của R sao cho $\lambda(0 :_A J) < \infty$ và A là R -môđun Artin. *Hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu của J liên kết với A* được định nghĩa như sau

$$H'_{J,A}(n) := \lambda(0 :_A J^{n+1}).$$

Theo [29, Proposition 2], tồn tại duy nhất đa thức $P'_{J,A}(x) \in \mathbb{Q}[x]$, được gọi là *đa thức Hilbert-Samuel đối ngẫu của J liên kết với A* , bậc $d = \text{Ndim } A$ sao cho $H'_{J,A}(n) = P'_{J,A}(n)$ với $n \gg 0$ và theo [45, Section 3] đa thức này

được viết dưới dạng

$$P'_{J,A}(x) = \sum_{i=0}^d (-1)^i e'_i(J, A) \binom{x+d-i}{d-i}.$$

Các số nguyên $e'_i(I, A)$ được gọi là *hệ số Hilbert-Samuel đôi ngẫu của J liên kết với A* , $e'(J, A) := e'_0(J, A)$ gọi là *số bội đôi ngẫu của J liên kết với A* .

Để nghiên cứu khái niệm đôi ngẫu của độ sâu môđun hữu hạn sinh, Ooishi [43] đã đưa ra khái niệm phần tử đối chính quy.

Định nghĩa 1.6.3. Phần tử $x \in R$ được gọi là *A -đối chính quy* nếu $xA = A$, tức là đồng cấu nhân $x : A \rightarrow A$ là toàn cấu. Một dãy các phần tử $x_1, \dots, x_r$ của R được gọi là *dãy A -đối chính quy* nếu $(0 :_A (x_1, \dots, x_r)) \neq 0$ và với mọi $i = 1, \dots, r$,

$$(0 :_A (x_1, \dots, x_{i-1})) \xrightarrow{x_i} (0 :_A (x_1, \dots, x_{i-1}))$$

là các toàn cấu.

Định nghĩa 1.6.4. *Độ rộng của môđun A* , kí hiệu $\text{Width}(A)$ là độ dài lớn nhất của dãy A -đối chính quy.

Nhận xét 1.6.5. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun Artin.

(i) Nếu A là R -môđun hữu hạn sinh thì $\text{Width}(A) = 0$ ([43, Proposition 3.3]).

(ii) $\text{Width}(A) = \inf\{n \geq 0 \mid \text{Tor}_n^R(A, k) \neq 0\} < \infty$ ([43, Corollary 3.7]).

Bổ đề sau đây chỉ ra mối liên hệ giữa chiều Noether và độ rộng của môđun Artin. Đây là cách nhìn đôi ngẫu của mối liên hệ giữa chiều Krull và độ sâu của môđun hữu hạn sinh.

Bổ đề 1.6.6 ([62, Lemma 2.11]). *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun Artin. Khi đó,*

$$\text{Width} A \leq \text{Ndim} A.$$

Trong trường hợp dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra, chúng ta có khái niệm đôi ngẫu của môđun Cohen-Macaulay.

Định nghĩa 1.6.7. R -môđun Artin A được gọi là *đối Cohen-Macaulay* nếu $\text{Width } A = \text{Ndim } A$.

Có thể dùng dãy đối chính quy để đặc trưng cho môđun đối Cohen-Macaulay như sau.

Tính chất 1.6.8 ([62, Proposition 2.15 và Lemma 2.2 (ii)]). *Môđun Artin A là đối Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu mọi hệ tham số của A là dãy A -đối chính quy.*

Idêan $K \subseteq J$ được gọi là *rút gọn của J liên kết với A* nếu tồn tại số $s \in \mathbb{N}$ sao cho

$$0 :_A J^{s+1} = 0 :_A KJ^s.$$

Nếu K là một rút gọn của J liên kết với A và không chứa một rút gọn thực sự nào của J liên kết với A thì K được gọi là *rút gọn tối thiểu của J liên kết với A* . Nếu K là rút gọn tối thiểu của J liên kết với A thì số mũ rút gọn của J ứng với K liên kết với A , kí hiệu $r'_K(J, A)$, được xác định như sau:

$$r'_K(J, A) = \min\{n \mid 0 :_A KJ^n = 0 :_A J^{n+1}\}.$$

Số mũ rút gọn của J liên kết với A là số được xác định như sau:

$$r'(J, A) := \min\{r'_K(J, A) \mid K \text{ là rút gọn tối thiểu của } J \text{ liên kết với } A\}.$$

Chúng ta trình bày bổ đề Nakayama của môđun Artin.

Bổ đề 1.6.9 ([29, Proposition 5]). *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương. Khi đó, $J \subseteq \mathfrak{m}$ khi và chỉ khi $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} 0 :_A J^n$ với mọi R -môđun Artin A .*

Từ Bổ đề 1.6.9, ta có

Hệ quả 1.6.10 ([56, Lemma 3.2]). *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun Artin. Giả sử J, K là các idêan của R sao cho*

$$(0 :_A J\mathfrak{m}) \cap (0 :_A K) \subseteq (0 :_A J).$$

Khi đó,

$$(0 :_A K) \subseteq (0 :_A J).$$

Chương 2

Chặn cho các hệ số Hilbert

Trong chương này, cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d > 0$ và J là idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R . Elias [17] đã chứng minh $\text{depth}(G(J^k))$ là hằng số khi $k \gg 0$, kí hiệu hằng số này bởi $\sigma(J)$. Mục đích chính của chương này là chứng minh tính không dương của các hệ số Hilbert $e_i(J)$, với một số điều kiện của $\sigma(J)$. Trong trường hợp $J = Q$ là idêan tham số, chúng tôi sẽ thiết lập các chặn cho các hệ số Hilbert $e_i(Q)$ ($i = 2, \dots, d$) theo chiều và hệ số Chern $e_1(Q)$, không phụ thuộc số bội $e(Q)$. Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [33].

2.1 Dấu các hệ số Hilbert của idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ

Như chúng ta đã giới thiệu trong Chương 1, hàm Hilbert-Samuel của J , $H_J(n) = \lambda(A/J^{n+1})$ là một đa thức $P_J(n)$, gọi là đa thức Hilbert-Samuel, bậc d với các hệ số thuộc $\mathbb{Q}$, khi n đủ lớn. Đa thức này được viết dưới dạng

$$P_J(n) = \sum_{i=0}^d (-1)^i \binom{n+d-i}{d-i} e_i(J).$$

Các số nguyên $e_i(J)$ được gọi là các hệ số Hilbert của J , đặc biệt $e(J) := e_0(J)$ được gọi là số bội của J và $e_1(J)$ được gọi là hệ số Chern của J . Chỉ số Hilbert của J , kí hiệu $n(J)$, là số nguyên được xác định như sau

$$n(J) = \max\{n \mid H_J(n) \neq P_J(n)\}.$$

Bổ đề 2.1.1. *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều d và J là idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R . Xét $x \in J \setminus \mathfrak{m}J$ là phần tử siêu bề mặt của J . Đặt $\overline{R} = R/(x)$ and $\overline{J} = J\overline{R}$. Khi đó,*

- (i) $n(J) \leq \text{reg}(G(J))$;
- (ii) $\text{reg}(G(\bar{J})) \leq \text{reg}(G(J))$;
- (iii) $J^{n+1} : x/J^n \cong (0 : x)$ với $n > \text{reg}(G(J))$.

Chứng minh. (i) Được suy ra từ [32, Lemma 2.1 và Lemma 2.2] hoặc Bổ đề 1.2.7.

(ii) Cho x^* là dạng khối đầu của x trong $G(J)$. Khi đó,

$$\text{reg}(G(J)/(x^*)) \leq \text{reg}(G(J)). \quad (2.1.1)$$

Mặt khác, tồn tại một toàn cấu phân bậc từ $G(J)/(x^*)$ vào $G(\bar{J})$ với hạt nhân của toàn cấu này là

$$K = \bigoplus_{n \geq 0} (J^{n+1} + x \cap J^n) / (J^{n+1} + xJ^{n-1}).$$

Vì x là phần tử siêu bề mặt của J nên $x \cap J^{n+1} = xJ^n$ với $n \gg 0$. Do đó, $K_n = 0$ với $n \gg 0$. Hay K là môđun có độ dài hữu hạn. Suy ra

$$\text{reg}(G(\bar{J})) \leq \text{reg}(G(J)/(x^*)) \quad (2.1.2)$$

Từ (2.1.1) và (2.1.2), ta thu được bất đẳng thức

$$\text{reg}(G(\bar{J})) \leq \text{reg}(G(J)).$$

(iii) Từ dãy khớp

$$0 \longrightarrow J^{n+1} : x/J^n \longrightarrow R/J^n \xrightarrow{x} R/J^{n+1} \longrightarrow R/(J^{n+1}, x) \longrightarrow 0,$$

ta có

$$\begin{aligned} \lambda(J^{n+1} : x/J^n) &= \lambda(R/J^n) - \lambda(R/J^{n+1}) + \lambda(\bar{R}/\bar{J}^{n+1}) \\ &= \lambda(\bar{R}/\bar{J}^{n+1}) - \lambda(J^n/J^{n+1}). \end{aligned}$$

Mặt khác, $J^{n+1} : x/J^n \cong (0 : x)$ với $n \gg 0$. Do đó, từ (i) và (ii), suy ra

$$n(J) \leq \text{reg}(G(J)) \quad \text{và} \quad n(\bar{J}) \leq \text{reg}(G(J)).$$

Vậy

$$J^{n+1} : x/J^n \cong (0 : x) \quad \text{với mọi } n > \text{reg}(G(J)).$$

□

Theo [17, Proposition 2.2], Elias đã chứng minh $\sigma_J(k) = \text{depth}(G(J^k))$ là hằng số khi $k \gg 0$ và được kí hiệu là $\sigma(J)$. Từ [25, Lemma 2.4],

$$a_i(G(J^k)) \leq [a_i(G(J))/k] \quad \text{với } i \leq d \text{ và } k \geq 1,$$

trong đó $[a] = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq a\}$. Do đó

$$a_i(G(J^k)) \leq 0 \quad \text{với mọi } i \leq d \text{ và } k \gg 0 \quad (2.1.3)$$

Theo [17, Proposition 2.2], ta có

$$\sigma(J) \geq \text{depth}(G(J)) \quad (2.1.4)$$

Bổ đề sau, chúng ta chỉ ra điều kiện để $\sigma(J)$ là số nguyên dương.

Bổ đề 2.1.2. *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 1$ và J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R . Nếu $\text{depth}(R) \geq 1$ thì $\sigma(J) \geq 1$.*

Chứng minh. Theo (2.1.3), ta có $a_i(G(J^k)) \leq 0$ với $k \gg 0$. Từ [26, Theorem 5.2], $a_0(G(J^k)) < a_1(G(J^k)) \leq 0$. Do đó, $H_{G(J^k)_+}^0(G(J^k)) = 0$ với $k \gg 0$. Suy ra $\sigma(J) = \text{depth}(G(J^k)) \geq 1$ với mọi $k \gg 0$. $\square$

Trong trường hợp J là ideal tham số của R , Linh [32, Proposition 3.5] đã chứng minh nếu $\sigma(J) \geq d - 2$ thì $e_d(J) \leq 0$. Nếu J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ, chúng ta thu được định lý sau là một sự tổng quát của [32, Proposition 3.5].

Định lý 2.1.3. *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 2$ và $\text{depth}(R) \geq d - 1$. Cho J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R sao cho $r(J) \leq d - 1$. Nếu $\sigma(J) \geq d - 2$ thì $e_d(J) \leq 0$.*

Chứng minh. Với $k \gg 0$, đặt $I = J^k$. Kí hiệu $\mathcal{R} = R[It] = \bigoplus_{n \geq 0} I^n$ là đại số Rees của R ứng với I và $\mathcal{R}_+ = \bigoplus_{n > 0} \mathcal{R}_n$. Theo [18, Proposition 2.7], ta có $e_d(J) = e_d(I)$. Từ [5, Theorem 4.1] và [5, Theorem 3.8],

$$\begin{aligned} (-1)^d e_d(J) &= (-1)^d e_d(I) = P_I(0) - H_I(0) \\ &= \sum_{i=0}^d (-1)^i \lambda(H_{\mathcal{R}_+}^i(\mathcal{R})_0) \\ &= \sum_{i=0}^d (-1)^i \lambda(H_{G(I)_+}^i G(I)_0). \end{aligned}$$

Vì $\text{depth}(G(I)) = \sigma(J) \geq d - 2$ nên $H_{G(I)_+}^i(G(I)) = 0$ với $i = 0, \dots, d - 3$. Mặt khác, theo Bổ đề 1.2.8 ta có $a_d(G(I)) + d \leq r(I)$. Từ [25, Lemma 2.7],

$$r(I) \leq \frac{|r(J) + 1 - s(J)|}{k} + s(J) - 1 = \frac{|r(J) + 1 - d|}{k} + d - 1 \leq d - 1,$$

trong đó $|a| = \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq a\}$ và $s(J) = \dim(G(J) \otimes R/\mathfrak{m})$ là độ trả giải tích của J . Do đó, $a_d(G(I)) < 0$. Hơn nữa, theo (2.1.3), $a_i(G(I)) \leq 0$ với mọi $i \geq 0$. Áp dụng [26, Theorem 5.2], ta có $a_{d-2}(G(I)) < a_{d-1}(G(I)) \leq 0$. Suy ra

$$(-1)^d e_d(J) = (-1)^{d-1} \lambda(H_{G(I)_+}^{d-1} G(I)_0).$$

Vậy $e_d(J) = -\lambda(H_{G(I)_+}^{d-1} (G(I))_0) \leq 0$. □

Theo chứng minh của Định lý 2.1.3, $e_d(J) = -\lambda(H_{G(I)_+}^{d-1} (G(I))_0)$. Nếu R là vành Cohen-Macaulay và $\sigma(J) \geq d - 1$ thì $a_{d-1}(G(I)) < 0$. Từ đó, chúng ta thu được hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.1.4. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Cohen-Macaulay chiều $d \geq 2$. Giả sử J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R với $r(J) \leq d - 1$. Nếu $\sigma(J) \geq d - 1$ thì $e_d(J) = 0$.*

Ideal J của R được gọi là *tiệm cận chuẩn tắc* nếu tồn tại một số nguyên $k \geq 1$ sao cho J^n là đóng nguyên với mọi $n \geq k$. Nếu J là ideal tiệm cận chuẩn tắc của R , theo [46, Theorem 7.3], ta có $\sigma(J) \geq 2$. Mafi và Naderi [38, Theorem 1.5] đã chỉ ra nếu R là vành Cohen-Macaulay chiều $d = 4$ và J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ tiệm cận chuẩn tắc sao cho $r(J) \leq 3$ thì $e_4(J) \leq 0$. Áp dụng Định lý 2.1.3, chúng ta thu được hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.1.5. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều 4 và $\text{depth}(R) \geq 3$. Giả sử J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ tiệm cận chuẩn tắc của R sao cho $r(J) \leq 3$. Khi đó, $e_4(J) \leq 0$.*

Lưu ý rằng, trong giả thiết của Hệ quả 2.1.5 vành R không nhất thiết là Cohen-Macaulay. Hệ quả 2.1.5 mà chúng ta thu được là mở rộng kết quả của [38, Theorem 1.5].

Hệ quả 2.1.6. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều 4 và $\text{depth}(R) \geq 3$. Giả sử J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R sao cho $r(J) \leq 2$. Nếu $\sigma(J) \geq 2$ thì*

$$e_i(J) \leq 0 \text{ với } i = 3, 4.$$

Chứng minh. Từ Định lý 2.1.3, $e_4(J) \leq 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử trường thặng dư $R/\mathfrak{m}$ là vô hạn và x_1 là phần tử siêu bề mặt của J . Đặt $R_1 = R/(x_1)$ và $J_1 = JR_1$. Khi đó, $\dim(R_1) = 3$, J_1 là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R_1 và $e_3(J) = e_3(J_1)$. Vì $\text{depth}(R) \geq 3$, $\text{depth}(R_1) \geq 2$. Theo Bổ đề 2.1.2, $\sigma(J_1) \geq 1$. Hơn nữa, $r(J_1) \leq r(J) \leq 2$. Áp dụng Định lý 2.1.3, ta có $e_3(J) = e_3(J_1) \leq 0$. Hệ quả được chứng minh. $\square$

Nếu R là vành Cohen-Macaulay chiều 3 và J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R sao cho $r(J) = 2$, Puthenpurakal [47, Theorem 9.1] đã chứng minh $e_3(J) \leq 0$. Chúng ta mở rộng kết quả của Puthenpurakal qua hệ quả sau.

Hệ quả 2.1.7. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 3$ và $\text{depth}(R) \geq d - 1$. Nếu J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R và $r(J) \leq 2$ thì $e_3(J) \leq 0$.

Chứng minh. Từ Bổ đề 2.1.2, ta có $\sigma(J) \geq 1$. Nếu $d = 3$, áp dụng Định lý 2.1.3 ta thu được $e_3(J) \leq 0$.

Nếu $d > 3$, không mất tính tổng quát, giả sử $R/\mathfrak{m}$ là vô hạn và $x_1, \dots, x_{d-3}$ là dãy siêu bề mặt của J . Đặt $\bar{R} = R/(x_1, \dots, x_{d-3})$ và $\bar{J} = J\bar{R}$. Khi đó, $\dim(\bar{R}) = 3$, $\text{depth}(\bar{R}) \geq 2$ và $r(\bar{J}) \leq r(J) \leq 2$. Theo Bổ đề 2.1.2, ta có $\text{depth}(\bar{R}) \geq 2$, $\sigma(\bar{J}) \geq 1$. Áp dụng Định lý 2.1.3, ta có $e_3(\bar{J}) \leq 0$. Từ Bổ đề 1.3.5, suy ra $e_3(J) = e_3(\bar{J}) \leq 0$. $\square$

Với giả thiết $\sigma(J) \geq d - 2$, Định lý 2.1.3 chỉ ra tính không dương của hệ số Hilbert $e_d(J)$. Tuy nhiên các hệ số Hilbert khác có thể dương. Ví dụ sau đây chỉ ra $e_d \leq 0$, nhưng các hệ số Hilbert khác là dương.

Ví dụ 2.1.8. Giả sử $R = \mathbb{Q}[x, y, z]_{(x, y, z)}$ và $J = (x^3, y^3, z^3, x^2y + z^3, xz^2, y^2z + x^2z, xyz)$. Khi đó, $K = (x^3, y^3, z^3)$ là rút gọn tối thiểu của J và $r_K(J) = 2$. Sử dụng Macaulay 2, ta tính được $\text{depth}(G(J)) = 0$ và $\sigma(J) = 1$. Mặt khác, chuỗi Hilbert $P_{G(J)}(t)$ của $G(J)$ là

$$P_{G(J)}(t) = \sum_{n \geq 0} \lambda(J^n/J^{n+1})t^n = \frac{h(t)}{(1-t)^3},$$

trong đó $h(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_s \in \mathbb{Z}[t]$. Suy ra

$$h(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_s = (1 - 3t + 3t^2 - t^3)P_{G(J)}(t).$$

Do đó,

$$a_0 = \lambda(R/J);$$

$$a_1 = \lambda(J/J^2) - 3\lambda(R/J);$$

$$a_2 = \lambda(J^2/J^3) - 3\lambda(J/J^2) + 3\lambda(R/J);$$

$$a_i = \lambda(J^i/J^{i+1}) - 3\lambda(J^{i-1}/J^i) + 3\lambda(J^{i-2}/J^{i-1}) - \lambda(J^{i-3}/J^{i-2}) \quad \text{với } i \geq 3.$$

Sử dụng Macaulay 2, ta có

$$a_0 = 13, a_1 = 6, a_2 = 13, a_3 = -6, a_4 = 1, a_5 = a_6 = \dots = 0.$$

Nghĩa là

$$h(t) = 13 + 6t + 13t^2 - 6t^3 + t^4.$$

Vậy,

$$e_0(J) = h(1) = 27;$$

$$e_1(J) = h'(1) = 18;$$

$$e_2(J) = \frac{h''(1)}{2!} = 1;$$

$$e_3(J) = \frac{h^{(3)}(1)}{3!} = -2.$$

Định lý sau chỉ ra tính không dương của các hệ số Hilbert khác.

Định lý 2.1.9. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 3$ và $\text{depth}(R) \geq d - 1$. Giả sử J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R sao cho $r(J) \leq 2$. Nếu $\text{depth}(G(J)) \geq d - 2$ thì

$$e_i(J) \leq 0 \quad \text{với } i = 3, \dots, d.$$

Chứng minh. Theo Định lý 2.1.3, ta có $e_d(J) \leq 0$. Nếu $d \leq 4$, khẳng định được suy ra từ Hệ quả 2.1.6.

Nếu $d > 4$, ta cần chứng minh $e_{d-i}(J) \leq 0$ với $i = 1, \dots, d - 3$. Không mất tính tổng quát, giả sử trường thặng dư $R/\mathfrak{m}$ là vô hạn và $x_1, \dots, x_d$ là dãy siêu bề mặt của J . Với mỗi $i = 1, \dots, d - 3$, đặt $R_i = R/(x_1, \dots, x_i)$ và $J_i = JR_i$. Theo giả thiết, ta có $\dim(R_i) = d - i$, $\text{depth}(R_i) \geq d - i - 1$ và $r(J_i) \leq r(J) \leq 2$. Vì $\text{depth}(G(J)) \geq d - 2$, $\text{depth}(G(J_i)) \geq d - i - 2$. Từ (2.1.4), ta có

$$\sigma(J_i) \geq \text{depth}(G(J_i)) \geq d - i - 2.$$

Áp dụng Định lý 2.1.3,

$$e_{d-i}(J) = e_{d-i}(J_i) \leq 0 \quad \text{với } i = 1, \dots, d-3.$$

Vậy, $e_i(J) \leq 0$ với mọi $i = 3, \dots, d$. □

Nhận xét 2.1.10. Định lý 2.1.9 là sự tổng quát các kết quả đã có trước đó của Puthenpurakal [47, Theorem 9.1], Saikia-Saloni [54, Corollary 3.2] và Linh-V. D. Trung [36, Theorem 2.9].

2.2 Chặn cho các hệ số Hilbert của idêan tham số

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều d và $\text{depth}(R) \geq d-1$. Giả sử Q là idêan tham số của R . Trong phần này, chúng ta sẽ thiết lập chặn cho các hệ số Hilbert $e_i(Q)$, $i \geq 2$ theo chiều và hệ số Chern $e_1(Q)$.

Bổ đề 2.2.1. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 2$ và $\text{depth}(R) \geq d-1$. Giả sử Q là idêan tham số của R và x là phần tử siêu bề mặt của Q . Khi đó, với mọi $n \geq 1$, ta có

$$\lambda(Q^{n+1} : x/Q^n) \leq -\binom{n+d-3}{d-2} e_1(Q).$$

Chứng minh. Giả sử $Q = (x_1, \dots, x_d)$ và $x = x_d$ là phần tử siêu bề mặt của Q . Đặt $J = (x_1, \dots, x_{d-1})$, ta có

$$\begin{aligned} Q^{n+1} : x/Q^n &= ((xQ^n + J^n Q) : x)/Q^n \\ &= (Q^n + (J^n Q : x))/Q^n \\ &\cong (J^n Q : x)/(Q^n \cap (J^n Q : x)). \end{aligned}$$

Vì $J^n \subseteq Q^n \cap (J^n Q : x)$,

$$\lambda(Q^{n+1} : x/Q^n) \leq \lambda(J^n : x/J^n).$$

Theo [32, Corollary 4.4],

$$\lambda(J^n : x/J^n) \leq -\binom{n+d-3}{d-2} e_1(Q).$$

Suy ra

$$\lambda(Q^{n+1} : x/Q^n) \leq -\binom{n+d-3}{d-2} e_1(Q).$$

□

Bổ đề 2.2.2. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 2$ và $\text{depth}(R) \geq 1$. Giả sử J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R và x là phần tử siêu bề mặt của J . Khi đó,

$$(-1)^d e_d(J) = \sum_{k=0}^r (H_{\bar{J}}(k) - P_{\bar{J}}(k)) - \sum_{k=0}^r \lambda(J^{k+1} : x/J^k),$$

với $r \geq \text{reg}(G(J)) + 1$, $\bar{R} = R/(x)$ và $\bar{J} = J\bar{R}$.

Chứng minh. Theo [40, Lemma 3.2], ta có

$$(-1)^d e_d(J) = \sum_{k=0}^{\infty} (H_{\bar{J}}(k) - P_{\bar{J}}(k)) - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(J^{k+1} : x/J^k).$$

Từ Bổ đề 2.1.1,

$$n(\bar{J}) \leq \text{reg}(G(\bar{J})) \leq \text{reg}(G(J)) < r \quad \text{và} \quad \lambda(J^{k+1} : x/J^k) = \lambda(0 :_R x) = 0,$$

với $k \geq r$. Do đó,

$$(-1)^d e_d(J) = \sum_{k=0}^r (H_{\bar{J}}(k) - P_{\bar{J}}(k)) - \sum_{k=0}^r \lambda(J^{k+1} : x/J^k).$$

□

Linh [32] đã thiết lập chặn cho chỉ số chính quy của vành phân bậc liên kết ứng với ideal tham số theo chiều và hệ số Chern $e_1(Q)$.

Định lý 2.2.3 ([32, Theorem 4.5]). Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 1$ và $\text{depth}(R) \geq d - 1$. Giả sử Q là ideal tham số của R . Khi đó,

$$\begin{aligned} \text{reg}(G(Q)) &\leq \max\{-e_1(Q) - 1, 0\} \quad \text{nếu } d = 1; \\ \text{reg}(G(Q)) &\leq \max\{[-4e_1(Q)]^{(d-1)!} + e_1(Q) - 1, 0\} \quad \text{nếu } d \geq 2. \end{aligned}$$

Đến đây chúng ta thiết lập các chặn cho các hệ số Hilbert $e_i(Q)$ ($i \geq 2$) theo chiều và $e_1(Q)$, là kết quả chính của phần này.

Định lý 2.2.4. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 2$ và $\text{depth}(R) \geq d - 1$. Giả sử Q là ideal tham số của R . Khi đó,

$$|e_i(Q)| \leq 3 \cdot 2^{i-2} r^{i-1} |e_1(Q)| \quad \text{với } i = 2, \dots, d,$$

trong đó, $r = \max\{[-4e_1(Q)]^{(d-1)!} + e_1(Q) - 1, 0\} + 1$.

Chứng minh. Giả sử $Q = (x_1, \dots, x_d)$. Không mất tính tổng quát, giả sử trường thặng dư $R/\mathfrak{m}$ là vô hạn. Giả sử $x = x_d$ là phần tử siêu bề mặt của Q . Đặt $\bar{R} = R/(x)$ và $\bar{Q} = Q\bar{R}$. Theo Bổ đề 2.2.2, ta có

$$\begin{aligned} (-1)^d e_d(Q) &= \sum_{k=0}^r [H_{\bar{Q}}(k) - P_{\bar{Q}}(k)] - \sum_{k=0}^r \lambda(Q^{k+1} : x/Q^k) \\ &= \sum_{k=0}^r [\lambda(\bar{R}/\bar{Q}^k) - \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i \binom{k+d-i-2}{d-i-1} e_i(\bar{Q})] - \sum_{k=0}^r \lambda(Q^{k+1} : x/Q^k) \\ &= \sum_{k=0}^r [\lambda(\bar{R}/\bar{Q}^k) - \binom{k+d-2}{d-1} e_0(\bar{Q}) - \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^i \binom{k+d-i-2}{d-i-1} e_i(\bar{Q})] \\ &\quad - \sum_{k=0}^r \lambda(Q^{k+1} : x/Q^k). \end{aligned}$$

Mặt khác, từ [32, Lemma 4.1],

$$0 \leq \lambda(\bar{R}/\bar{Q}^k) - \binom{k+d-2}{d-1} e_0(\bar{Q}) \leq -\binom{k+d-3}{d-2} e_1(\bar{Q}).$$

Hơn nữa, từ Bổ đề 2.2.1,

$$\lambda(Q^{k+1} : x/Q^k) \leq -\binom{k+d-3}{d-2} e_1(Q) = \binom{k+d-3}{d-2} |e_1(Q)|.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} |e_d(Q)| &\leq 3 \sum_{k=0}^r \binom{k+d-3}{d-2} |e_1(Q)| + \sum_{k=0}^r \sum_{i=2}^{d-1} \binom{k+d-i-2}{d-i-1} |e_i(\bar{Q})| \\ &\leq 3 \binom{r+d-2}{d-1} |e_1(Q)| + \sum_{i=2}^{d-1} \sum_{k=0}^r \binom{k+d-i-2}{d-i-1} |e_i(\bar{Q})| \\ &= 3 \binom{r+d-2}{d-1} |e_1(Q)| + \sum_{i=2}^{d-1} \binom{r+d-i-1}{d-i} |e_i(\bar{Q})|. \end{aligned}$$

Lưu ý

$$\binom{r+d-2}{d-1} \leq r^{d-1} \quad \text{và} \quad \binom{r+d-i-1}{d-i} \leq r^{d-i}.$$

Do đó,

$$|e_d(Q)| \leq 3.r^{d-1} |e_1(Q)| + \sum_{i=2}^{d-1} r^{d-i} e_i(\bar{Q}).$$

Bằng phương pháp quy nạp theo chiều d , ta có thể giả sử

$$|e_i(\bar{Q})| \leq 3.2^{i-2}.r^{i-1} |e_1(\bar{Q})| \quad \text{với} \quad i = 2, \dots, d-1.$$

Mặt khác, $e_i(Q) = e_i(\overline{Q})$ với $i = 1, \dots, d-1$. Suy ra

$$|e_i(Q)| \leq 3.2^{i-2}.r^{i-1}|e_1(\overline{Q})| = 3.2^{i-2}.r^{i-1}|e_1(Q)| \quad \text{với } i = 2, \dots, d-1.$$

Phần còn lại chúng ta thiết lập chặn cho $e_d(Q)$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} |e_d(Q)| &\leq 3.r^{d-1}|e_1(Q)| + \sum_{i=2}^{d-1} r^{d-i}.3.2^{i-2}.r^{i-1}|e_1(Q)| \\ &= 3.r^{d-1}|e_1(Q)| + \sum_{i=2}^{d-1} 3.r^{d-1}.2^{i-2}|e_1(Q)| \\ &= 3.r^{d-1}|e_1(Q)| + 3.r^{d-1}|e_1(Q)| \left(\sum_{i=2}^{d-1} 2^{i-2} \right) \\ &= 3.r^{d-1}|e_1(Q)| + 3.r^{d-1}|e_1(Q)|.(2^{d-2} - 1) \\ &= 3.2^{d-2}.r^{d-1}|e_1(Q)|. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

2.3 Kết luận Chương 2

Trong chương này, chúng tôi đã thu được một số kết quả chính sau đây:

Trong phần thứ nhất, chúng tôi chứng minh tính không dương của một số hệ số Hilbert của ideal m-nguyên sơ với số mũ rút gọn nhỏ trong trường hợp $\text{depth} R \geq \dim R - 1$ (Định lý 2.1.3 và Định lý 2.1.9).

Trong phần thứ hai, chúng tôi thiết lập chặn trên cho các hệ số Hilbert của ideal tham số theo hệ số Chern trong trường hợp $\text{depth} R \geq \dim R - 1$ (Định lý 2.2.2).

Chương 3

Nhiều của idêan trong vành địa phương

Trong chương này, cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều d và J là idêan của R . Giả sử $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan của R sinh bởi dãy các phần tử $f_1, \dots, f_r$. Idêan $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$, trong đó $f'_i \equiv f_i \pmod{J^N}$ với $N \gg 0$, được gọi là *nhiều J -adic của I* . Nếu I' là một nhiều $\mathfrak{m}$ -adic của I thì ta nói I' là một *nhiều bé của I* . Mục đích chính của chương này là nghiên cứu sự bảo toàn của hàm Hilbert của R/I ứng với idêan J đối với nhiều J -adic của I . Một cách cụ thể, nếu J là idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của vành Cohen-Macaulay suy rộng R , chúng tôi thiết lập một chặn tuyến tính cho chỉ số nhiều của I ứng với J theo bậc đồng điều $\text{hdeg}(J, R/I)$, kết quả này là một mở rộng kết quả của Quý-V. D. Trung [48]. Hơn nữa, nếu A là R -môđun đối Cohen-Macaulay và J là idêan của R thỏa mãn $\lambda(0 :_A J) < \infty$, chúng tôi chứng minh sự bảo toàn của hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu của J liên kết với $\overline{A} = 0 :_A I$ đối với nhiều J -adic của I . Nội dung của chương này được viết dựa trên các bài báo [35] và [60].

3.1 Chặn tuyến tính cho chỉ số nhiều Hilbert

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều d và J là idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R . Giả sử $f_1, \dots, f_r$ là dãy lọc chính quy và $I = (f_1, \dots, f_r)$. Như đã giới thiệu trong phần mở đầu, *chỉ số nhiều của I ứng với J* là số nguyên bé nhất $N(I, J)$ sao cho với mọi idêan $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$, trong đó

$f'_i \equiv f_i \pmod{J^N}$ với $i = 1, \dots, r$ thì

$$\lambda(R/(I + J^n)) = \lambda(R/(I' + J^n))$$

với mọi $n \geq 0$. Trong phần này, chúng tôi sẽ thiết lập chặn tuyến tính cho chỉ số nhiều Hilbert $N(I, J)$ theo bậc mở rộng $\text{hdeg}(J, R/I)$. Kết quả mà chúng tôi thu được là một mở rộng kết quả của Quý-V. D. Trung [48] cho lớp idêan m-nguyên sơ. Nội dung của phần này được viết dựa theo bài báo [35].

Kí hiệu $\nu(J)$ là số phần tử sinh tối thiểu của idêan J . Với giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương bất kỳ, chúng ta mở rộng [68, Theorem 6.15] qua bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.1.1. *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 1$ với trường thặng dư vô hạn và J là idêan m-nguyên sơ của R . Khi đó,*

$$\nu(J^n) \leq \text{hdeg}(J, R) \binom{n+d-2}{d-1} + \binom{n+d-2}{d-2}.$$

Chứng minh. Giả sử $K = (x_1, \dots, x_d)$ là rút gọn tối thiểu của J . Đặt $K_0 = (x_1, \dots, x_{d-1})$. Xét phép nhúng $J^n/K_0^n \hookrightarrow R/K_0^n$. Theo chứng minh của [68, Theorem 6.11],

$$\text{hdeg}(J, R/K_0^n) \leq \text{hdeg}(J, R) \binom{n+d-2}{d-1}.$$

Mặt khác, $\nu(J^n) \leq \nu(K_0^n) + \nu(J^n/K_0^n) \leq \nu(K_0^n) + \text{hdeg}(J, J^n/K_0^n)$. Do đó,

$$\nu(J^n) \leq \binom{n+d-2}{d-2} + \text{hdeg}(J, R) \binom{n+d-2}{d-1}.$$

□

Để đưa ra được chặn trên cho chỉ số rút gọn của một idêan J bất kỳ của R , chúng ta cần kết quả sau của Eakin và Sathaye.

Định lý 3.1.2 ([13, Theorem 1]). *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 1$ và J là idêan của R . Giả sử K là rút gọn tối thiểu của J . Nếu tồn tại số nguyên dương n sao cho*

$$\nu(J^n) < \binom{n+d}{d}$$

thì $r_K(J) \leq n - 1$.

Từ Bổ đề 3.1.1 và Định lý 3.1.2, chúng ta thu được chặn trên cho chỉ số rút gọn.

Định lý 3.1.3. *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 1$ với trường thặng dư vô hạn và J là idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R . Nếu K là rút gọn tối thiểu của J thì*

$$r_K(J) \leq \max\{d \cdot \text{hdeg}(J, R) - 2d + 1, 0\}.$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.1.1, ta có

$$v(J^n) \leq \text{hdeg}(J, R) \binom{n+d-2}{d-1} + \binom{n+d-2}{d-2}.$$

Theo Định lý 3.1.2, chúng ta cần chọn số nguyên n sao cho

$$\text{hdeg}(J, R) \binom{n+d-2}{d-1} + \binom{n+d-2}{d-2} < \binom{n+d}{d}.$$

Hay

$$\text{hdeg}(J, R) \frac{n}{n+d-1} + \frac{d-1}{n+d-1} < \frac{n+d}{d}.$$

Nếu chọn $n = d \cdot \text{hdeg}(J, R) - 2d + 2$ thì bất phương trình được thỏa mãn.

Giả sử $d \cdot \text{hdeg}(J, R) - 2d + 1 \geq 0$. Khi đó,

$$r_K(J) \leq d \cdot \text{hdeg}(J, R) - 2d + 1.$$

□

Hoàn toàn tương tự [48, Lemma 2.8], ta có bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.1.4. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều d và J là idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R . Giả sử $f_1, \dots, f_r$ là dãy lọc chính quy và $I = (f_1, \dots, f_r)$. Nếu K là rút gọn tối thiểu của J trong R/I và N là số nguyên không âm sao cho $r_K(J, R/I) \leq N$. Khi đó, với mọi $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$, trong đó $f'_i \equiv f_i \pmod{J^{N+2}}$ với $i = 1, \dots, r$, ta có K là rút gọn tối thiểu của J trong R/I' và $r_K(J, R/I') \leq N + 1$.*

Theo Định lý 3.1.3, $r(J, R/I) \leq \max\{s \cdot \text{hdeg}(J, R/I) - 2s + 1, 0\}$, với $s = \dim(R/I)$. Đặt $N_1 = \max\{s \cdot \text{hdeg}(J, R/I) - 2s + 1, 0\} + 2$. Từ Bổ đề 3.1.4, chúng ta thu được bổ đề sau.

Bổ đề 3.1.5. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều d và J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R . Giả sử $I = (f_1, \dots, f_r)$ là ideal của R sinh bởi dãy lọc chính quy $f_1, \dots, f_r$ của R . Nếu K là rút gọn tối thiểu của J trong R/I thì với $m \geq 0$, ta có

- (i) $J^{N_1+m} + I = K^{m+1} J^{N_1-1} + I$;
- (ii) $J^{N_1+m} + I' = K^{m+1} J^{N_1-1} + I'$ với mọi $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$, trong đó $f'_i \equiv f_i \pmod{J^{N_1}}$ với $i = 1, \dots, r$.

Từ Bổ đề 3.1.5, chúng ta thu được bổ đề sau.

Bổ đề 3.1.6. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 1$ và J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R . Giả sử $I = (f_1, \dots, f_r)$ là ideal của R sinh bởi dãy lọc chính quy. Đặt $s = d - r$ và $K = (x_1, \dots, x_s)$ là rút gọn tối thiểu của J trong R/I . Với $t \geq 1$, đặt $K_t = (x_1^t, \dots, x_s^t)$ và $N_1 = \max\{s \cdot \text{hdeg}(J, R/I) - 2s + 1, 0\} + 2$. Khi đó với mọi $m \geq 0$ và $i \geq 0$, ta có

- (i) $J^{N_1+s(t-1)+mt+i} + I = K_t^{m+1} J^{N_1+s(t-1)-t+i} + I$;
- (ii) $J^{N_1+s(t-1)+mt+i} + I' = K_t^{m+1} J^{N_1+s(t-1)-t+i} + I'$ với mọi $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$, trong đó $f'_i \equiv f_i \pmod{J^{N_1}}$ với $i = 1, \dots, r$.

Chứng minh. Từ Bổ đề 3.1.5, ta có

$$J^{N_1+s(t-1)+mt+i} + I = K^{s(t-1)+mt+1+i} J^{N_1-1} + I.$$

Vì $K^{s(t-1)+1} = K_t K^{(s-1)(t-1)}$ nên

$$K^{s(t-1)+mt+1+i} = K_t^{m+1} K^{(s-1)(t-1)+i} = K_t^{m+1} K^{s(t-1)-t+1+i}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} J^{N_1+s(t-1)+mt+i} + I &= K_t^{m+1} K^{s(t-1)-t+1+i} J^{N_1-1} + I \\ &= K_t^{m+1} J^{N_1+s(t-1)-t+i} + I. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$J^{N_1+s(t-1)+mt+i} + I' = K_t^{m+1} J^{N_1+s(t-1)-t+i} + I'$$

với mọi $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$, trong đó $f'_i \equiv f_i \pmod{J^{N_1}}$ với $i = 1, \dots, r$. □

Bổ đề 3.1.7. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d \geq 1$ và J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R . Giả sử $I = (f_1, \dots, f_r)$ là ideal của R sinh

bởi dãy lọc chính quy $f_1, \dots, f_r$ của R . Đặt $s = d - r$ và $K = (x_1, \dots, x_s)$ là rút gọn tối tiểu của J trong R/I . Giả sử t là số nguyên dương sao cho $K^t = (x_1^t, \dots, x_s^t)$ là ideal tham số chuẩn tắc của R/I và $N = N_1 + (s+1)t$. Với $0 \leq i \leq t-1$, đặt $P_i = N_1 + s(t-1) + i$. Khi đó với mỗi $m \geq 0$, ta có

$$\lambda \left(\frac{K_t^{m+1} + I}{K_t^{m+1} J^{P_i-t} + I} \right) = \lambda \left(\frac{K_t^{m+1} + I'}{K_t^{m+1} J^{P_i-t} + I'} \right) \quad (3.1.1)$$

với mọi $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$, trong đó $f'_i \equiv f_i \pmod{J^N}$ với $i = 1, \dots, r$.

Chứng minh. Từ Bổ đề 3.1.6, ta có $J^N + I = J^{N_1+(s+1)t} + I \subseteq K_t + I$. Do đó, $K_t + I = K_t + I'$. Đặt $L_t = K_t + I = K_t + I'$. Khi đó đẳng thức (3.1.1) tương đương với đẳng thức sau

$$\lambda \left(\frac{L_t^{m+1} + I}{L_t^{m+1} J^{P_i-t} + I} \right) = \lambda \left(\frac{L_t^{m+1} + I'}{L_t^{m+1} J^{P_i-t} + I'} \right) \quad (3.1.2)$$

với $m \geq 0$ và $0 \leq i \leq t-1$.

Mặt khác,

$$\frac{L_t^{m+1} + I}{L_t^{m+1} J^{P_i-t} + I} \cong \frac{L_t^{m+1}}{L_t^{m+1} J^{P_i-t} + L_t^{m+1} \cap I}$$

và

$$\frac{L_t^{m+1} + I'}{L_t^{m+1} J^{P_i-t} + I'} \cong \frac{L_t^{m+1}}{L_t^{m+1} J^{P_i-t} + L_t^{m+1} \cap I'}$$

với $m \geq 0$ và $0 \leq i \leq t-1$. Do đó, chúng ta chỉ cần chứng minh

$$\lambda \left(\frac{L_t^{m+1}}{L_t^{m+1} J^{P_i-t} + L_t^{m+1} \cap I} \right) = \lambda \left(\frac{L_t^{m+1}}{L_t^{m+1} J^{P_i-t} + L_t^{m+1} \cap I'} \right) \quad (3.1.3)$$

với $m \geq 0$ và $0 \leq i \leq t-1$. Vì $x_1^t, \dots, x_d^t$ là một d -dãy của R/I nên theo [27, Theorem 2.1], ta có $K_t^{m+1} \cap I \subseteq K_t^m I$. Do đó,

$$L_t^{m+1} \cap I = L_t^m I + K_t^{m+1} \cap I = L_t^m I.$$

Tương tự, ta cũng có

$$L_t^{m+1} \cap I' = L_t^m I'.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
L_t^{m+1}J^{P_i-t} + L_t^{m+1} \cap I &= L_t^{m+1}J^{P_i-t} + L_t^m I \\
&= L_t^m(L_t J^{P_i-t} + I) \\
&= L_t^m(K_t J^{P_i-t} + I) \\
&= L_t^m(J^{P_i} + I) \\
&= L_t^m(J^{P_i} + I') \\
&= L_t^m(K_t J^{P_i-t} + I') \\
&= L_t^{m+1}J^{P_i-t} + L_t^{m+1} \cap I'
\end{aligned}$$

với $m \geq 0$ và $0 \leq i \leq t-1$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Với những chuẩn bị ở trên, chúng ta thu được kết quả chính của phần này là định lý sau đây.

Định lý 3.1.8. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Cohen-Macaulay suy rộng chiều d và J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ của R . Giả sử $I = (f_1, \dots, f_r)$ là ideal của R sinh bởi dãy lọc chính quy $f_1, \dots, f_r$ của R . Đặt $s = d - r$ và*

$$N = \max\{s \cdot \text{hdeg}(J, R/I) - 2s + 1, 0\} + (s+1)I(R) + 2.$$

Khi đó,

$$\lambda(R/(J^n + I)) = \lambda(R/(J^n + I')) \quad (3.1.4)$$

với mọi $n \geq 0$ và $I' = (f_1, \dots, f_r')$, trong đó $f_i' \equiv f_i \pmod{J^N}$ với $i = 1, \dots, r$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử trường thặng dư $R/\mathfrak{m}$ là vô hạn. Đặt $N_1 = \max\{s \cdot \text{hdeg}(J, R/I) - 2s + 1, 0\} + 2$. Khi đó, R/I là vành Cohen-Macaulay suy rộng chiều s . Theo Hệ quả 3.1.5 (i), tồn tại rút gọn tối tiểu $K = (x_1, \dots, x_s) \subseteq J$ trong R/I sao cho

$$J^{N_1+m} + I = K^{m+1}J^{N_1-1} + I$$

với mọi $m \geq 0$. Vì $f_i' \equiv f_i \pmod{J^N}$ và $N \leq N_1$ nên $f_i' \equiv f_i \pmod{J^{N_1}}$ với $i = 1, \dots, r$. Theo Hệ quả 3.1.5 (ii), ta có

$$J^{N_1+m} + I' = K^{m+1}J^{N_1-1} + I',$$

với mọi $m \geq 0$. Đặt $t = \max\{I(R), 1\}$, ta có $I(R/I) \leq t$. Theo [64, Proposition 2.10], $K_t = (x_1^t, \dots, x_s^t) + I$ là ideal tham số chuẩn tắc của R/I . Vì $N_1 + s(t -$

1) $\leq N$, ta có

$$J^n + I = J^n + I'$$

với mọi $n \leq N_1 + s(t-1)$. Do đó, chúng ta sẽ chứng minh

$$\lambda\left(\frac{R}{J^n + I}\right) = \lambda\left(\frac{R}{J^n + I'}\right)$$

với mọi $n \geq N_1 + s(t-1)$. Tức là chỉ cần chứng minh

$$\lambda\left(\frac{R}{J^{N_1+s(t-1)+mt+i} + I}\right) = \lambda\left(\frac{R}{J^{N_1+s(t-1)+mt+i} + I'}\right)$$

với mọi $m \geq 0$ và $0 \leq i \leq t-1$. Đặt $P_i = N_1 + s(t-1) + i$ for $0 \leq i \leq t-1$. Do đó, chỉ cần chứng minh

$$\lambda\left(\frac{R}{J^{P_i+mt} + I}\right) = \lambda\left(\frac{R}{J^{P_i+mt} + I'}\right) \quad (3.1.5)$$

với $m \geq 0$ và $0 \leq i \leq t-1$.

Theo Bổ đề 3.1.6, đẳng thức (3.1.5) tương đương với đẳng thức sau

$$\lambda\left(\frac{R}{K_t^{m+1}J^{P_i-t} + I}\right) = \lambda\left(\frac{R}{K_t^{m+1}J^{P_i-t} + I'}\right) \quad (3.1.6)$$

với $m \geq 0$ và $0 \leq i \leq t-1$. Ta có

$$\lambda\left(\frac{R}{K_t^{m+1}J^{P_i-t} + I}\right) = \lambda\left(\frac{R}{K_t^{m+1} + I}\right) + \lambda\left(\frac{K_t^{m+1} + I}{K_t^{m+1}J^{P_i-t} + I}\right)$$

và

$$\lambda\left(\frac{R}{K_t^{m+1}J^{P_i-t} + I'}\right) = \lambda\left(\frac{R}{K_t^{m+1} + I'}\right) + \lambda\left(\frac{K_t^{m+1} + I'}{K_t^{m+1}J^{P_i-t} + I'}\right).$$

Vì $N \geq e(J, R/I) + I(R) + 1$ nên theo [48, Theorem 3.2], ta có

$$\lambda(H_m^i(R/I)) = \lambda(H_m^i(R/I'))$$

với mọi $i < s$. Do đó, theo [64, Corollary 4.2],

$$\lambda\left(\frac{R}{K_t^{m+1} + I}\right) = \lambda\left(\frac{R}{K_t^{m+1} + I'}\right)$$

với mọi $m \geq 0$. Mặt khác, theo Bổ đề 3.1.7,

$$\lambda\left(\frac{K_t^{m+1} + I}{K_t^{m+1}J^{P_i-t} + I}\right) = \lambda\left(\frac{K_t^{m+1} + I'}{K_t^{m+1}J^{P_i-t} + I'}\right)$$

với $m \geq 0$ và $0 \leq i \leq t-1$. Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.1.9. Quý và N. V. Trung [49] đã thiết lập chặn cho chỉ số nhiều Hilbert $N(I, J)$ trong trường hợp tổng quát theo bậc mở rộng. Nếu R là vành Cohen-Macaulay suy rộng, chặn mà chúng tôi thu được trong Định lý 3.1.8 là tốt hơn chặn trong [49, Corollary 4.8].

Nếu $J = \mathfrak{m}$, chúng ta thu được hệ quả sau đây.

Hệ quả 3.1.10. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Cohen-Macaulay suy rộng chiều d . Giả sử $I = (f_1, \dots, f_r)$ là ideal sinh bởi dãy lọc chính quy $f_1, \dots, f_r$ của R . Đặt $s = d - r$ và

$$N = \max\{s \cdot \text{hdeg}(R/I) - 2s + 1, 0\} + (s + 1)I(R) + 2.$$

Khi đó,

$$\lambda(R/(\mathfrak{m}^n + I)) = \lambda(R/(\mathfrak{m}^n + I'))$$

với mọi $n \geq 0$ và $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$, trong đó $f'_i \equiv f_i \pmod{\mathfrak{m}^N}$ với $i = 1, \dots, r$.

Nhận xét 3.1.11. Chặn mà chúng tôi thu được trong Hệ quả 3.1.10 là một cải tiến so với chặn của Quý và V. D. Trung [48].

Nếu $J + I$ là ideal tham số của R thì $r(J, R/I) = 0$. Khi đó, chúng ta thu được chặn phổ dụng cho chỉ số nhiều Hilbert như sau.

Hệ quả 3.1.12. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Cohen-Macaulay suy rộng chiều d . Giả sử J là ideal của R và $I = (f_1, \dots, f_r)$ là ideal sinh bởi dãy lọc chính quy $f_1, \dots, f_r$ của R thỏa mãn $J + I$ là ideal tham số của R . Đặt $s = d - r$ và

$$N = (s + 1)I(R) + 1.$$

Khi đó,

$$\lambda(R/(J^n + I)) = \lambda(R/(J^n + I'))$$

với mọi $n \geq 0$ và $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$, trong đó $f'_i \equiv f_i \pmod{J^N}$ với $i = 1, \dots, r$.

Nhận xét 3.1.13. Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương bất kỳ và J là ideal $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ. Giả sử $I = (f_1, \dots, f_r)$ là ideal sinh bởi dãy lọc chính quy. Nếu J là ideal sinh bởi d -dãy trong $R/(f_1, \dots, f_r)$ thì chúng tôi đã chứng minh hàm Hilbert-Samuel của R/I ứng với J bảo toàn qua nhiều J -adic của I [34].

3.2 Nhiều của hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu

Trong phần này, cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun đối Cohen-Macaulay. Xét $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan của R sinh bởi dãy A -đối chính quy $f_1, \dots, f_r$. Giả sử J là idêan của R sao cho $\lambda(0 :_A J) < \infty$. Trong phần này, chúng tôi sẽ nghiên cứu sự bảo toàn hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu của J liên kết với $\bar{A} = 0 :_A I$ dưới tác động nhiều J -adic của I . Nội dung của phần này được viết dựa theo bài báo [60].

Đầu tiên, chúng ta khẳng định nếu K là một rút gọn tối tiểu của J liên kết với $\bar{A}$ thì K cũng là một rút gọn tối tiểu của J liên kết với $\bar{A}' = 0 :_A I'$, trong đó I' là một nhiều J -adic của I .

Bổ đề 3.2.1. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương với trường thặng dư vô hạn và A là R -môđun Artin. Giả sử $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan của R sinh bởi một phần hệ tham số $f_1, \dots, f_r$ của A và $\bar{A} = 0 :_A I$. Xét K là rút gọn tối tiểu của J liên kết với $\bar{A}$, đặt*

$$N = r'_K(J, \bar{A}) + 2.$$

Giả sử $f'_i = f_i + \varepsilon_i$, trong đó ε_i là phần tử bất kì trong J^N với $i = 1, \dots, r$ và $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$. Khi đó,

$$0 :_A (I', KJ^{N-1}) = 0 :_A (I', J^N),$$

và K là rút gọn tối tiểu của J liên kết với $\bar{A}'$, với $\bar{A}' = 0 :_A I'$ và $r'_K(J, \bar{A}') \leq N - 1$.

Chứng minh. Vì $r'_K(J, \bar{A}) = N - 2$ nên

$$0 :_A (I, KJ^{N-2}) = 0 :_A (I, J^{N-1}).$$

Suy ra

$$0 :_A (I, KJ^{N-1}) = 0 :_A (I, J^N).$$

Mặt khác, theo cách chọn số nguyên N , ta có

$$0 :_A (I, J^i) = 0 :_A (I', J^i)$$

với mọi $i \leq N$. Rõ ràng $0 :_A (I', J^N) \subseteq 0 :_A (I', KJ^{N-1})$. Ngược lại,

$$\begin{aligned}
0 :_A ((I', KJ^{N-1}) + J(I', J^N)) &= (0 :_A (I', KJ^{N-1})) \cap (0 :_A J(I', J^N)) \\
&= (0 :_A (I', KJ^{N-1})) \cap (0 :_A J(I, KJ^{N-1})) \\
&= 0 :_A (I', KJ^{N-1}, IJ) \\
&= (0 :_A I') \cap (0 :_A J(I, KJ^{N-2})) \\
&= (0 :_A I') \cap (0 :_A J(I, J^{N-1})) \\
&\subseteq 0 :_A (I', J^N).
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề Nakayama cho môđun Artin [29, Corollary of Proposition 5], ta có

$$0 :_A (I', KJ^{N-1}) = 0 :_A (I', J^N).$$

Do đó, K là một rút gọn của J liên kết với $\bar{A}'$ và $r'_K(J, \bar{A}') \leq N - 1$. Từ Bổ đề 3.2.2, K là idêan tham số của $\bar{A}'$. Theo [56, Theorem 6.5 (ii)], K là rút gọn tối tiểu của J liên kết với $\bar{A}'$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Trong bổ đề sau, chúng ta sẽ chứng minh nếu $f_1, \dots, f_r$ là một phân hệ tham số của A thì $f'_1, \dots, f'_r$ cũng là một phân hệ tham số của A .

Bổ đề 3.2.2. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương với trường thặng dư vô hạn và A là R -môđun Artin với $\text{Ndim } A = d$. Xét $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan của R sinh bởi một phân hệ tham số $f_1, \dots, f_r$ của A và $\bar{A} = 0 :_A I$. Giả sử K là rút gọn tối tiểu của J liên kết với $\bar{A}$. Đặt

$$N = r'_K(J, \bar{A}) + 2.$$

Giả sử $f'_i = f_i + \varepsilon_i$, trong đó ε_i là phần tử bất kì trong J^N với $i = 1, \dots, r$ và $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$. Khi đó,

$$0 :_A (I, K) = 0 :_A (I', K)$$

và $f'_1, \dots, f'_r$ là một phân hệ tham số của A .

Chứng minh. Ta có,

$$\begin{aligned}
0 :_A (I, K) &= (0 :_A (I, KJ^{N-1})) \cap (0 :_A K) \\
&= (0 :_A (I, J^N)) \cap (0 :_A K) \\
&= (0 :_A (I', J^N)) \cap (0 :_A K) \\
&= (0 :_A (I', KJ^{N-1})) \cap (0 :_A K) \\
&= 0 :_A (I', K).
\end{aligned}$$

Vì $f_1, \dots, f_r$ là một phần hệ tham số của A , theo [62, Lemma 2.7], $\text{Ndim } \bar{A} = d - r$. Mặt khác, K là rút gọn tối tiểu của J liên kết với $\bar{A}$, theo [56, Theorem 6.5 (ii)] tồn tại một hệ tham số $x_1, \dots, x_{d-r}$ của $\bar{A}$ sao cho $K = (x_1, \dots, x_{d-r})$ là ideal tham số của $\bar{A}$. Do đó, $\text{Ndim}(0 :_A (I, K)) = \text{Ndim}(0 :_{\bar{A}} K) = 0$. Suy ra, $\text{Ndim}(0 :_A (I', K)) = 0$. Hay, $f'_1, \dots, f'_r, x_1, \dots, x_{d-r}$ là hệ tham số của A . Vậy $f'_1, \dots, f'_r$ là một phần hệ tham số của A . $\square$

Bổ đề sau đây là chìa khóa để chứng minh kết quả chính của phần này.

Bổ đề 3.2.3. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun Artin. Xét $I = (f_1, \dots, f_r)$ là ideal của R sinh bởi dãy các phần tử $f_1, \dots, f_r$ và $\bar{A} = 0 :_A I$. Giả sử $K = (x_1, \dots, x_s)$ là ideal của R sinh bởi dãy $\bar{A}$ -đối chính quy $x_1, \dots, x_s$. Khi đó,*

$$0 :_A IK^m \subseteq (0 :_A I) + (0 :_A K^{m+1}) \quad (3.2.1)$$

với mọi $m \geq 0$.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh quy nạp theo s với mỗi m .

Với $s = 1$, giả sử $y \in 0 :_A I(x_1^m)$, suy ra $yx_1^m \in \bar{A}$. Vì x_1 là phần tử $\bar{A}$ -đối chính quy nên $x_1 \bar{A} = \bar{A}$. Do đó, tồn tại $z \in \bar{A}$ sao cho $yx_1^m = x_1^m z$, vì vậy $y - z \in 0 :_A (x_1^m) \subseteq 0 :_A (x_1^{m+1})$. Suy ra, $y \in (0 :_A I) + (0 :_A (x_1^{m+1}))$ với mọi $m \geq 0$.

Với $s > 1$, áp dụng quy nạp chúng ta có thể giả sử khẳng định đúng với mọi $i < s$. Đặt $K_1 = (x_2, \dots, x_s)$ và $A_1 = 0 :_A (I, x_1)$. Theo giả thiết $x_2, \dots, x_s$ là dãy A_1 -đối chính quy, áp dụng giả thiết quy nạp cho (I, x_1) , ta có

$$0 :_A (I, x_1)K_1^m \subseteq (0 :_A (I, x_1)) + (0 :_A K_1^{m+1})$$

với mọi $m \geq 0$. Để chứng minh (3.2.1) ta tiếp tục chứng minh quy nạp theo m . Với $m = 0$ khẳng định rõ ràng. Với $m \geq 1$, ta có $K^m = K_1^m + x_1 K^{m-1}$,

xét $y \in 0 :_A IK^m = 0 :_A I(K_1^m + x_1 K^{m-1})$, ta có $y \in (0 :_A IK_1^m) \cap (0 :_A Ix_1 K^{m-1})$. Suy ra, $y \in (0 :_A IK_1^m)$ và $yx_1 \in (0 :_A IK^{m-1})$. Theo giả thiết quy nạp,

$$yx_1 \in (0 :_A I) + (0 :_A K^m) = x_1(0 :_A I) + (0 :_A K^m).$$

Do đó, tồn tại $b \in (0 :_A I)$ và $c \in (0 :_A K^m)$ sao cho $yx_1 = bx_1 + c$. Đặt $d = y - b$, ta có $y = d + b$. Phần còn lại chúng ta chỉ cần chứng minh $d \in (0 :_A I) + (0 :_A K^{m+1})$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} d \in (0 :_A IK_1^m) \cap (0 :_A x_1 K^m) &= (0 :_A IK_1^m) \cap (0 :_A x_1 K_1^m) \cap (0 :_A x_1 K^m) \\ &\subseteq ((0 :_A (I, x_1)) + (0 :_A K_1^{m+1})) \cap (0 :_A x_1 K^m) \\ &= (0 :_A (I, x_1)) + ((0 :_A K_1^{m+1}) \cap (0 :_A x_1 K^m)) \\ &\subseteq (0 :_A I) + (0 :_A K^{m+1}). \end{aligned}$$

Vậy $y = b + d \in (0 :_A I) + (0 :_A K^{m+1})$. □

Từ Bổ đề 3.2.3, chúng ta thu được hệ quả sau đây.

Hệ quả 3.2.4. Cho (R, m) là vành Noether địa phương với trường thặng dư vô hạn và A là R -môđun đối Cohen-Macaulay với $\text{Ndim } A = d$. Giả sử $I = (f_1, \dots, f_r)$ là ideal của R sinh bởi một phần hệ tham số $f_1, \dots, f_r$ của A và $\bar{A} = 0 :_A I$. Giả sử K là rút gọn tối thiểu của J liên kết với $\bar{A}$. Đặt

$$N = r'_K(J, \bar{A}) + 2.$$

Giả sử $f'_i = f_i + \varepsilon_i$, trong đó ε_i là phần tử bất kì trong J^N , với $i = 1, \dots, r$ và $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$. Đặt $L = (I, K)$, khi đó

- (i) $0 :_A IL^m = (0 :_A I) + (0 :_A L^{m+1})$ với mọi $m \geq 0$;
- (ii) $0 :_A I'L^m = (0 :_A I') + (0 :_A L^{m+1})$ với mọi $m \geq 0$.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh (ii); (i) được chứng minh tương tự. Theo Bổ đề 3.2.2, $f'_1, \dots, f'_r$ là một phần hệ tham số của A , vì A là môđun đối Cohen-Macaulay, ta có $f'_1, \dots, f'_r$ là dãy A -đối chính quy, do đó $\bar{A}' = 0 :_A I'$ là môđun đối Cohen-Macaulay. Theo Bổ đề 3.2.1, K là rút gọn tối thiểu của J liên kết với $\bar{A}'$, vì vậy K sinh bởi dãy $\bar{M}'$ -đối chính quy. Theo Bổ đề 3.2.3, ta có

$$0 :_A I'K^m \subseteq (0 :_A I') + (0 :_A K^{m+1})$$

với mọi $m \geq 0$. Theo Bổ đề 3.2.2, $0 :_A L = 0 :_A (I, K) = 0 :_A (I', K)$. Do đó,

$$0 :_A L^m = 0 :_A (I, K)^m = 0 :_A (I', K)^m$$

với mọi $m \geq 0$. Suy ra

$$\begin{aligned} 0 :_A I' L^m &= 0 :_A I' L^m \cap 0 :_A I' K^m \\ &= 0 :_A I' L^m \cap ((0 :_A I') + (0 :_A K^{m+1})) \\ &= (0 :_A I') + ((0 :_A I' L^m) \cap (0 :_A K^{m+1})) \\ &= (0 :_A I') + ((0 :_A I' (I', K)^m) \cap (0 :_A K^{m+1})) \\ &= (0 :_A I') + (0 :_A (I', K)^{m+1}) \\ &= (0 :_A I') + (0 :_A L^{m+1}) \end{aligned}$$

với mọi $m \geq 0$. □

Bổ đề sau đây biểu diễn công thức tường minh của hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu của idêan tham số liên kết với môđun đối Cohen-Macaulay.

Bổ đề 3.2.5. *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun đối Cohen-Macaulay với $\text{Ndim } A = d$. Nếu K là idêan của R sinh bởi hệ tham số $x_1, \dots, x_d$ của A . Khi đó,*

$$\lambda(0 :_A K^{n+1}) = \lambda(0 :_A K) \binom{n+d}{d}.$$

Chứng minh. Suy ra từ [45, Corollary 3.2]. □

Mệnh đề sau đây khẳng định hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu của idêan tham số liên kết với môđun đối Cohen-Macaulay bảo toàn qua nhiều.

Mệnh đề 3.2.6. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun đối Cohen-Macaulay với $\text{Ndim } A = d$. Giả sử $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan của R sinh bởi dãy A -đối chính quy $f_1, \dots, f_r$ và $\overline{A} = 0 :_A I$. Xét J là idêan của R sao cho $\lambda(0 :_A J) < \infty$ và K là một rút gọn tối tiểu của J liên kết với $\overline{A}$. Đặt*

$$N = r'_K(J, \overline{A}) + 2.$$

Giả sử $f'_i = f_i + \varepsilon_i$, trong đó ε_i là phần tử bất kì trong J^N , với $i = 1, \dots, r$ và $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$. Khi đó,

$$\lambda(0 :_A (I, K^n)) = \lambda(0 :_A (I', K^n))$$

với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh. Theo giả thiết, ta có $\bar{A}$ là môđun đối Cohen-Macaulay. Vì K là rút gọn tối thiểu của J liên kết với $\bar{A}$ nên K sinh bởi hệ tham số $x_1, \dots, x_s$ của $\bar{A}$ với $s = d - r$. Theo Bổ đề 3.2.5, ta có

$$\lambda(0 :_A (I, K^{n+1})) = \lambda(0 :_A (I, K)) \binom{n+s}{s}.$$

Theo Bổ đề 3.2.2, I' sinh bởi dãy A -đối chính quy $f'_1, \dots, f'_r$, suy ra $\bar{A}' = 0 :_A I'$ là môđun đối Cohen-Macaulay và $\text{Ndim} \bar{A}' = s$. Theo Bổ đề 3.2.1, K là rút gọn tối thiểu của J liên kết với $\bar{A}'$. Tương tự lập luận như trên, ta có

$$\lambda(0 :_A (I', K^{n+1})) = \lambda(0 :_A (I', K)) \binom{n+s}{s}.$$

Theo Bổ đề 3.2.2,

$$0 :_A (I, K) = 0 :_A (I', K).$$

Do đó,

$$\lambda(0 :_A (I, K^n)) = \lambda(0 :_A (I', K^n))$$

với mọi $n \geq 0$. □

Với những gì được chuẩn bị ở trên, chúng ta đưa ra nội dung chính của phần này về sự bảo toàn hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu của idêan liên kết với môđun đối Cohen-Macaulay.

Định lý 3.2.7. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun đối Cohen-Macaulay với $\text{Ndim} A = d$. Xét $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan của R sinh bởi dãy A -đối chính quy $f_1, \dots, f_r$. Giả sử J là idêan của R sao cho $\lambda(0 :_A J) < \infty$. Đặt $\bar{A} = 0 :_A I$ và

$$N = r'(J, \bar{A}) + 2.$$

Giả sử $f'_i = f_i + \varepsilon_i$, trong đó ε_i là phần tử bất kì trong J^N , với $i = 1, \dots, r$ và $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$. Khi đó,

$$\lambda(0 :_A (I, J^n)) = \lambda(0 :_A (I', J^n))$$

với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử trường thặng dư $R/\mathfrak{m}$ là vô hạn. Đặt $s = d - r$, khi đó tồn tại rút gọn tối tiểu $K = (x_1, \dots, x_s)$ của J liên kết với $\bar{A}$ sao cho $r'_K(J, \bar{A}) = r'(J, \bar{A}) = N - 2$. Từ cách chọn số nguyên N , ta có

$$0 :_A (I, J^n) = 0 :_A (I', J^n)$$

với mọi $n \leq N$. Do đó, chúng ta chỉ cần chứng minh

$$\lambda(0 :_A (I, J^n)) = \lambda(0 :_A (I', J^n))$$

với mọi $n \geq N$. Với $n = m + N$, trong đó m là một số nguyên dương, ta có

$$0 :_A (I, J^n) = 0 :_A (I, J^{m+N}) = 0 :_A (I, K^{m+1} J^{N-1})$$

và

$$0 :_A (I', J^n) = 0 :_A (I', J^{m+N}) = 0 :_A (I', K^{m+1} J^{N-1}).$$

Với mỗi $m \geq 0$, xét các dãy khớp ngắn sau đây

$$0 \longrightarrow 0 :_A (I, K^{m+1}) \longrightarrow 0 :_A (I, K^{m+1} J^{N-1}) \longrightarrow \frac{0 :_A (I, K^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I, K^{m+1})} \longrightarrow 0$$

và

$$0 \longrightarrow 0 :_A (I', K^{m+1}) \longrightarrow 0 :_A (I', K^{m+1} J^{N-1}) \longrightarrow \frac{0 :_A (I', K^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I', K^{m+1})} \longrightarrow 0.$$

Theo Mệnh đề 3.2.6, ta có

$$\lambda(0 :_A (I, K^{m+1})) = \lambda(0 :_A (I', K^{m+1}))$$

với mọi $m \geq 0$. Từ đây chúng ta cần chứng minh

$$\lambda \left(\frac{0 :_A (I, K^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I, K^{m+1})} \right) = \lambda \left(\frac{0 :_A (I', K^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I', K^{m+1})} \right)$$

với mọi $m \geq 0$. Đặt $L = (I, K)$ thì $0 :_A L = 0 :_A (I, K) = 0 :_A (I', K)$, khi đó

$$\frac{0 :_A (I, K^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I, K^{m+1})} = \frac{0 :_A (I, L^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I, L^{m+1})}$$

và

$$\frac{0 :_A (I', K^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I', K^{m+1})} = \frac{0 :_A (I', L^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I', L^{m+1})},$$

với mọi $m \geq 0$. Vì vậy, chúng ta sẽ chứng minh

$$\lambda \left(\frac{0 :_A (I, L^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I, L^{m+1})} \right) = \lambda \left(\frac{0 :_A (I', L^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I', L^{m+1})} \right)$$

với mọi $m \geq 0$.

Chúng ta khẳng định

$$0 :_A L^{m+1} + 0 :_A (I, L^{m+1} J^{N-1}) = 0 :_A L^{m+1} + 0 :_A (I', L^{m+1} J^{N-1})$$

với mọi $m \geq 0$. Thật vậy, với mỗi $m \geq 0$,

$$\begin{aligned} (0 :_A L^{m+1}) + (0 :_A (I, L^{m+1} J^{N-1})) &= (0 :_A L^{m+1} J^{N-1}) \cap ((0 :_A I) + (0 :_A L^{m+1})) \\ &= (0 :_A L^{m+1} J^{N-1}) \cap (0 :_A I L^m) \quad (\text{Hệ quả 3.2.4 (i)}) \\ &= (0 :_A (I, L J^{N-1})) :_A L^m \\ &= (0 :_A (I, K J^{N-1})) :_A L^m \\ &= (0 :_A (I', K J^{N-1})) :_A L^m \\ &= (0 :_A (I', L J^{N-1})) :_A L^m \\ &= (0 :_A L^{m+1} J^{N-1}) \cap (0 :_A I' L^m) \\ &= (0 :_A L^{m+1} J^{N-1}) \cap ((0 :_A I') + (0 :_A L^{m+1})) \quad (\text{Hệ quả 3.2.4 (ii)}) \\ &= (0 :_A L^{m+1}) + (0 :_A (I', L^{m+1} J^{N-1})). \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \frac{0 :_A (I, L^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I, L^{m+1})} &= \frac{0 :_A (I, L^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I, L^{m+1} J^{N-1}) \cap 0 :_A L^{m+1}} \\ &\cong \frac{0 :_A (I, L^{m+1} J^{N-1}) + 0 :_A L^{m+1}}{0 :_A L^{m+1}} \\ &= \frac{0 :_A (I', L^{m+1} J^{N-1}) + 0 :_A L^{m+1}}{0 :_A L^{m+1}} \\ &\cong \frac{0 :_A (I', L^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I', L^{m+1} J^{N-1}) \cap 0 :_A L^{m+1}} \\ &= \frac{0 :_A (I', L^{m+1} J^{N-1})}{0 :_A (I', L^{m+1})} \end{aligned}$$

với mọi $m \geq 0$. Do đó, các môđun này có cùng độ dài. Định lý được chứng minh. $\square$

Từ Định lý 3.2.7, chúng ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 3.2.8. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương và A là R -môđun đối Cohen-Macaulay với $\text{Ndim } A = d$. Xét $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan của R sinh bởi dãy A -đối chính quy $f_1, \dots, f_r$. Giả sử J là idêan của R sao cho $\lambda(0 :_A J) < \infty$. Đặt $\bar{A} = 0 :_A I$ và

$$N = r'(J, \bar{A}) + 2.$$

Giả sử $f'_i = f_i + \varepsilon_i$, trong đó ε_i là phần tử bất kì trong J^N , với $i = 1, \dots, r$ và $I' = (f'_1, \dots, f'_r)$. Khi đó,

$$e'_i(J, \bar{A}) = e'_i(J, \bar{A}'),$$

với $i = 0, \dots, d - r$, trong đó $\bar{A}' = 0 :_A I'$.

Chứng minh. Ta có, $\text{Ndim } \bar{A} = d - r$ và theo Bổ đề 3.2.2, $f'_1, \dots, f'_r$ là một phần hệ tham số của A . Suy ra, $\text{Ndim } \bar{A}' = d - r$. Theo [45, Section 3], với $n \gg 0$,

$$\lambda(0 :_A (I, J^{n+1})) = \sum_{i=0}^{d-r} (-1)^i e'_i(J, \bar{A}) \binom{n+d-r-i}{d-r-i}.$$

và

$$\lambda(0 :_A (I', J^{n+1})) = \sum_{i=0}^{d-r} (-1)^i e'_i(J, \bar{A}') \binom{n+d-r-i}{d-r-i}.$$

Từ Định lý 3.2.7, ta có

$$e'_i(J, \bar{A}) = e'_i(J, \bar{A}'),$$

với $i = 0, \dots, d - r$. □

Nhận xét 3.2.9. Nếu J là idêan tham số của $\bar{A}$ thì $r'(J, \bar{A}) = 0$. Khi đó, $N = 2$ là số nguyên thỏa mãn Định lý 3.2.7.

3.3 Kết luận Chương 3

Trong chương này, chúng tôi đã thu được một số kết quả chính sau đây:

Trong phần thứ nhất, chúng tôi đưa ra chặn trên tuyến tính theo bậc mở rộng cho chỉ số nhiều của hàm Hilbert-Samuel cho idêan sinh bởi dãy lọc chính quy ứng với idêan $\mathfrak{m}$ -nguyên sơ trong vành Cohen-Macaulay suy rộng (Định lý 3.1.8).

Trong phần thứ hai, chúng tôi thiết lập chặn trên tường minh cho chỉ số nhiều của hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu cho ideal sinh bởi dãy đối chính quy trong vành đối Cohen-Macaulay (Định lý 3.2.7).

Chương 4

Chỉ số chính quy của ideal khử liên kết với đồ thị

Khái niệm ideal khử (elimination ideal) liên kết với một đồ thị được giới thiệu bởi Anwar and Khalid [4]. Mục đích chính của chương này là thiết lập chặn tổ hợp cho chỉ số chính quy của ideal khử liên kết với một số lớp đồ thị đặc biệt. Nội dung của chương này được viết dựa theo bài báo [61].

4.1 Ideal khử liên kết với đồ thị

Chúng ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản của lý thuyết đồ thị cần thiết để xây dựng khái niệm ideal khử.

Định nghĩa 4.1.1. Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị đơn, liên thông, hữu hạn với tập đỉnh $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

- (i) *Bậc của đỉnh* v_i là số cạnh đi qua đỉnh v_i , kí hiệu $\deg(v_i)$. Nếu $\deg(v_i) = 0$ thì v_i được gọi là *đỉnh cô lập*.
- (ii) Đỉnh v_i của G được gọi là *đỉnh trội* nếu $\deg(v_i) \geq \deg(v_j)$ với mọi $i \neq j$. Tập hợp tất cả các đỉnh trội của G , kí hiệu $D(G)$, gọi là *tập trội* của G .
- (iii) Đồ thị G được gọi là *đồ thị phân tán* nếu tồn tại ít nhất một đỉnh cô lập.

Câu hỏi mà chúng tôi quan tâm được đề xuất bởi [4, Question 2.1] như sau.

Câu hỏi 4.1.2. Có bao nhiêu đỉnh trội cần bỏ đi từ một đồ thị đơn, hữu hạn, liên thông cho trước một cách đệ quy để các đồ thị con thu được là không phân tán?

Anwar và Khalid [4] đã đưa ra một phương pháp hệ thống để giải quyết câu hỏi này, gọi tên là *phương pháp khử đỉnh trội* (Dominating Vertex Elimination Method - DVE method) như sau:

Giả sử G là đồ thị đơn, liên thông, hữu hạn. Đặt $G_0 = G$ và $D(G_0)$ là tập hợp các đỉnh trội của G_0 . Chọn 1 đỉnh $v_{i_0} \in D(G_0)$ sao cho $G_1 = G_0 - \{v_{i_0}\}$ không là đồ thị phân tán. Lại chọn 1 đỉnh $v_{i_1} \in D(G_1)$ sao cho $G_2 = G_1 - \{v_{i_1}\}$ không là đồ thị phân tán. Lặp lại quá trình này, chúng ta thu được một dãy liên tiếp các đồ thị con của G là

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r,$$

trong đó mỗi đồ thị $G_k (0 \leq k \leq r)$ có $n - k$ đỉnh.

Định nghĩa 4.1.3. Số nguyên r lớn nhất sao cho G_i không là đồ thị phân tán với mọi $i \leq r$, được gọi là *chỉ số ổn định bậc* (graphical degree stability) của G , kí hiệu $\text{Stab}_d(G)$.

Định nghĩa 4.1.4. Giả sử G_i là đồ thị với $V(G_i) = \{v_1, \dots, v_i\}$ và $S = k[x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức n biến trên trường k .

(i) Giả sử dãy bậc của G_i là $(d_1, d_2, \dots, d_i)$ thỏa mãn $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_i$. Idêan $Q_{G_i} = (x_1^{d_1}, \dots, x_i^{d_i})$ được gọi là *idêan dãy* (sequential ideal) của G_i .

(ii) Giả sử

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r$$

là dãy liên tiếp các đồ thị con của G với $r = \text{Stab}_d(G)$, ta có các idêan dãy $Q_{G_i} = (x_1^{d_{i_1}}, \dots, x_{n-i}^{d_{i_{n-i}}})$ với $i = 0, \dots, r$. Khi đó, *idêan khử* (elimination ideal) của G , kí hiệu $I_D(G)$, được định nghĩa như sau

$$I_D(G) = \bigcap_{i=0}^r Q(G_i).$$

Lưu ý: Với mỗi G_i , chúng ta luôn giả sử tập đỉnh $V(G_i) = \{v_1, \dots, v_i\}$ thỏa mãn $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_i$ với $d_i = \deg(v_i)$.

Định nghĩa 4.1.5. Xét $S = k[x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức n biến với hệ tử trên trường k và I là ideal đơn thức của S . Với mỗi đơn thức $u \in S$, đặt $m(u) = \max\{j : x_j | u\}$ và $m(I) = \max\{m(u) : u \in \mathcal{G}(I)\}$, trong đó $\mathcal{G}(I)$ là hệ sinh tối thiểu của I . Ideal đơn thức I được gọi là *ổn định* (stable) nếu với mỗi $u \in I$ và $1 \leq j \leq m(u)$ thì $x_j \cdot \frac{u}{x_{m(u)}} \in I$. Kí hiệu $d(I)$ là bậc lớn nhất của các đơn thức trong $\mathcal{G}(I)$ và $I_{\geq t}$ là ideal sinh bởi các đơn thức của I có bậc lớn hơn hoặc bằng t .

Bây giờ chúng ta sẽ nhắc lại một số tính chất cần thiết cho việc chứng minh các kết quả chính của chương này. Theo [3, Proposition 1.1] và sử dụng phương pháp quy nạp chúng ta thu được kết quả sau.

Bổ đề 4.1.6. Giả sử I_i là các ideal đơn thức và $m_i \geq d(I_i)$ với $i = 1, \dots, n$. Nếu $I_{i \geq m_i}$ là ổn định với $i = 1, \dots, n$ thì $(\cap_{i=1}^n I_i)_{\geq \max\{m_1, \dots, m_n\}}$ cũng ổn định.

Kết quả sau đây cho ta một chặn trên của chỉ số chính quy của ideal đơn thức.

Định lý 4.1.7 ([16, Proposition 1.2]). Nếu I là ideal đơn thức với $d(I) = d$ và $r \geq d$ là số nguyên sao cho $I_{\geq r}$ là ổn định thì $\text{reg}(I) \leq r$.

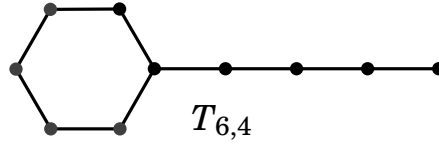
4.2 Chỉ số chính quy của ideal khử liên kết với đồ thị

Trong phần này, chúng tôi sẽ đưa ra các công thức tường minh của chỉ số ổn định bậc $\text{Stab}_d(G)$ (Định nghĩa 4.1.3) và thiết lập các chặn trên cho chỉ số chính quy của các ideal khử $I_D(G)$ của một số lớp đồ thị đặc biệt.

Nhận xét 4.2.1. Để thuận lợi, chúng ta sẽ đánh nhãn các đỉnh v_i của các đồ thị như các biến x_i của vành đa thức $S = k[x_1, \dots, x_n]$.

Đầu tiên, chúng ta tính chỉ số ổn định bậc của đồ thị nòng nọc. Sau đó, chúng ta thiết lập chặn tổ hợp cho chỉ số chính quy của ideal khử liên kết với lớp đồ thị này.

Định nghĩa 4.2.2. Đồ thị nòng nọc (tadpole) $T_{m,n}$ ($m \geq 3, n \geq 2$) là đồ thị đơn, hữu hạn, liên thông đạt được bằng cách nối một chu trình C_m với một đồ thị đường P_n bởi một cầu nối. Đồ thị $T_{m,n}$ có $m + n$ đỉnh.



Hình 1. Đồ thị nòng nọc $T_{6,4}$.

Bổ đề 4.2.3. Nếu $T_{m,n}$ là đồ thị nòng nọc với $m \geq 3, n \geq 2$ thì

$$\text{Stab}_d(T_{m,n}) = 1 + \text{Stab}_d(P_{m-1}) + \text{Stab}_d(P_n).$$

Chứng minh. Đồ thị nòng nọc $G_0 = T_{m,n}$ chứa một đỉnh bậc 3 nằm trên chu trình và cầu nối, $m + n - 2$ đỉnh bậc 2 và một đỉnh bậc 1. Do đó, $D(G_0)$ chứa 1 phần tử. Áp dụng phương pháp DVE trên G , bỏ đi đỉnh bậc 3 chúng ta thu được đồ thị con G_1 gồm 2 đồ thị đường P_{m-1} và P_n . Không mất tính tổng quát, áp dụng phương pháp DVE trên P_{m-1} và sau đó trên P_n , ta có

$$\text{Stab}_d(T_{m,n}) = 1 + \text{Stab}_d(P_{m-1}) + \text{Stab}_d(P_n),$$

với $m \geq 3, n \geq 2$. □

Bổ đề 4.2.4. Giả sử $T_{m,n}$ là đồ thị nòng nọc với $m \geq 3, n \geq 2$. Khi đó, các iđêan dây được cho như sau

$$Q_{G_i}(T_{m,n}) = \begin{cases} (x_1^3, x_2^2, \dots, x_{m+n-1}^2, x_{m+n}) & \text{nếu } i = 0; \\ (x_1^2, \dots, x_{m+n-(2+3i)}^2, x_{m+n-(2+3i)+1}, \dots, x_{m+n-i}) & \text{nếu } i = 1, \dots, r; \end{cases}$$

với $r = \text{Stab}_d(T_{m,n})$.

Chứng minh. Dây bậc của đồ thị nòng nọc $G_0 = T_{m,n}$ là $d_0 = (3, \underbrace{2, \dots, 2}_{m+n-2}, 1)$.

Theo chứng minh Bổ đề 4.2.3, đồ thị G_1 có dây bậc là $d_1 = (\underbrace{2, \dots, 2}_{m+n-5}, 1, 1, 1, 1)$.

Tiếp tục quá trình này, chúng ta thu được dãy liên tiếp các đồ thị con của đồ thị nòng nọc như sau

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_r$$

trong đó dây bậc của mỗi đồ thị G_i được xác định bởi

$$d_i = (\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m+n-(2+3i)}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2(i+1)})$$

gồm $m + n - i$ thành phần với $i = 1, \dots, r$. Tức là có ba đỉnh bậc 2 bị mất đi và xuất hiện hai đỉnh bậc 1 trong đồ thị mới sau mỗi lần áp dụng phương pháp DVE. Do đó, các idêan dãy Q_{G_i} là

$$Q_{G_0} = (x_1^3, x_2^2, \dots, x_{m+n-1}^2, x_{m+n})$$

và

$$Q_{G_i} = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_{m+n-(2+3i)}^2, x_{m+n-(2+3i)+1}, \dots, x_{m+n-i}),$$

với mọi $i = 1, \dots, r$. □

Định lý 4.2.5. *Giả sử $T_{m,n}$ là đồ thị nòng nọc với $m \geq 3, n \geq 2$. Khi đó,*

$$\text{reg}(I_D(T_{m,n})) \leq m + n + 1.$$

Chứng minh. Giả sử $\text{Stab}_d(T_{m,n}) = r$ với r được xác định trong Bổ đề 4.2.3. Theo Bổ đề 4.2.4, các idêan dãy là

$$Q_{G_i}(T_{m,n}) = \begin{cases} (x_1^3, x_2^2, \dots, x_{m+n-1}^2, x_{m+n}) & \text{nếu } i = 0; \\ (x_1^2, \dots, x_{m+n-(2+3i)}^2, x_{m+n-(2+3i)+1}, \dots, x_{m+n-i}) & \text{nếu } i = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Do đó, idêan khử của $T_{m,n}$ là $I_D(T_{m,n}) = \bigcap_{i=0}^r Q_{G_i}$. Ta xét hai trường hợp của các idêan dãy.

Trường hợp 1. Với $i = 0$, đặt $\gamma(G_0) = m + n + 1$, ta sẽ chứng minh $Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ là ổn định. Xét $u \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$, thì $u = vx_j^{a_j}$ với $j \in \{1, \dots, m + n\}$ nào đó và $v \in (x_1, \dots, x_{m+n})^{\gamma(G_0) - a_j}$ trong đó

$$a_j = \begin{cases} 3 & \text{nếu } j = 1; \\ 2 & \text{nếu } j = 2, \dots, m + n - 1; \\ 1 & \text{nếu } j = m + n. \end{cases}$$

Nếu $m(u) > j$ thì $\frac{x_k u}{x_{m(u)}} = \frac{x_k v}{x_{m(u)}} x_j^{a_j} \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ với mọi $k < m(u)$. Do đó, $Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ là ổn định.

Nếu $m(u) = j$ thì $u \in (x_1, \dots, x_{m+n})^{\gamma(G_0)}$, với $(x_1, \dots, x_{m+n})^{\gamma(G_0)}$ là idêan ổn định và

$$Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)} \subseteq (x_1, \dots, x_{m+n})^{\gamma(G_0)}.$$

Ta sẽ chứng minh $(x_1, \dots, x_{m+n})^{\gamma(G_0)} \subseteq Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$. Xét $w \in (x_1, \dots, x_{m+n})^{\gamma(G_0)}$ thì $w = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{m+n}^{\alpha_{m+n}}$ với $\alpha_t \geq 0$ với mọi t và $\sum_{t=1}^{m+n} \alpha_t \geq \gamma(G_0)$. Giả sử $\alpha_1 < 3$ và $\alpha_t < 2$ với mọi $t = 2, \dots, m + n - 1$ và $\alpha_{m+n} < 1$, khi đó $\sum_{t=1}^{m+n} \alpha_t \leq m + n$

(mâu thuẫn). Do đó, $\alpha_1 \geq 3$ hoặc tồn tại $k \in \{2, \dots, m+n-1\}$ sao cho $\alpha_k \geq 2$ hoặc $\alpha_{m+n} \geq 1$. Khi đó, $w = x_k^{\alpha_k} (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k - \alpha_k} \dots x_{m+n}^{\alpha_{m+n}})$ với k nào đó và $k \in \{1, \dots, m+n\}$, từ điều này suy ra $w \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ và khẳng định được chứng minh.

Trường hợp 2. Với $i = 1, \dots, r$, đặt $\gamma(G_i) = m+n-(1+3i)$, khi đó $Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ là ổn định. Thật vậy, xét $u \in Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ thì $u = vx_j^{a_j}$ với j nào đó thỏa mãn $j = 1, \dots, m+n-i$ và $v \in (x_1, \dots, x_{m+n-i})^{\gamma(G_i) - a_j}$, trong đó

$$a_j = \begin{cases} 2 & \text{nếu } j = 1, \dots, m+n-(2+3i); \\ 1 & \text{nếu } j = m+n-(2+3i)+1, \dots, m+n-i. \end{cases}$$

Nếu $m(u) > j$ thì $\frac{x_k u}{x_{m(u)}} = \frac{x_k v}{x_{m(u)}} x_j^{a_j} \in Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ với mọi $k < m(u)$. Do đó, $Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ là ổn định.

Nếu $m(u) = j$ thì $u \in (x_1, \dots, x_{m+n-i})^{\gamma(G_i)}$, với $(x_1, \dots, x_{m+n-i})^{\gamma(G_i)}$ là ideal ổn định và

$$Q_{G_i \geq \gamma(G_i)} \subseteq (x_1, \dots, x_{m+n-i})^{\gamma(G_i)}.$$

Ta khẳng định $(x_1, \dots, x_{m+n-i})^{\gamma(G_i)} \subseteq Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$. Xét $w \in (x_1, \dots, x_{m+n-i})^{\gamma(G_i)}$ thì $w = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{m+n-i}^{\alpha_{m+n-i}}$ với $\alpha_t \geq 0$ với mọi t và $\sum_{t=1}^{m+n-i} \alpha_t \geq \gamma(G_i)$. Giả sử $\alpha_t < 2$ với mọi $t = 1, \dots, m+n-(2+3i)$ và $\alpha_t < 1$ với mọi $t = m+n-(2+3i)+1, \dots, m+n-i$, suy ra $\sum_{t=1}^{m+n-i} \alpha_t \leq m+n-(2+3i)$ (mâu thuẫn). Do đó, tồn tại $k \in \{1, \dots, m+n-(2+3i)\}$ sao cho $\alpha_k \geq 2$ hoặc tồn tại $k \in \{m+n-(2+3i)+1, \dots, m+n-i\}$ sao cho $\alpha_k \geq 1$. Khi đó, ta có thể viết $w = x_k^{\alpha_k} w_1$ với $k \in \{1, \dots, m+n-i\}$, suy ra $w \in Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$.

Từ Bổ đề 4.1.6, ta có $(I_D(T_{m,n}))_{\geq \gamma_0}$ là ideal ổn định với

$$\gamma_0 = \max\{\gamma(G_i) \mid i = 0, \dots, r\} = m+n+1.$$

Theo Định lý 4.1.7, ta có

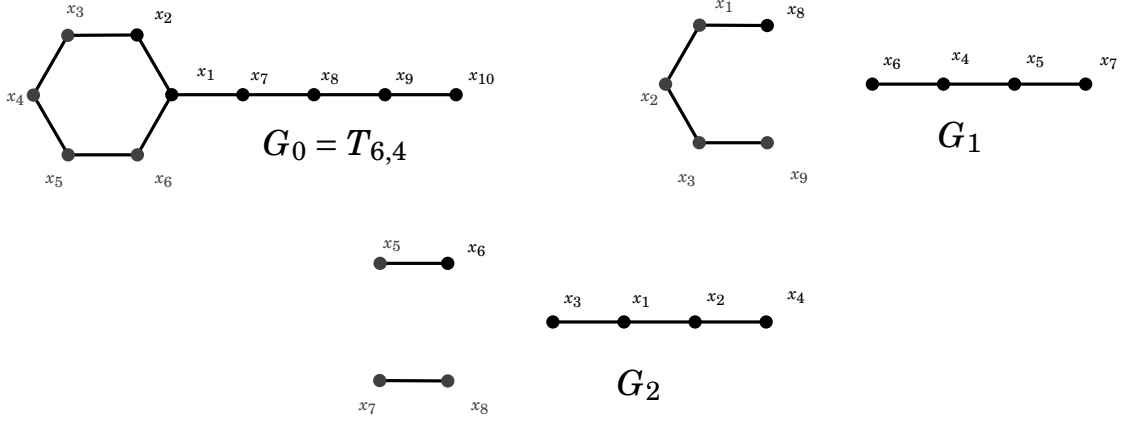
$$\text{reg}(I_D(T_{m,n})) \leq m+n+1.$$

Định lý được chứng minh. □

Ví dụ 4.2.6 (Hình 2). Với đồ thị nòng nọc $T_{6,4}$, ta có $D(G_0) = \{x_1\}$. Áp dụng phương pháp DVE trên G_0 , ta thu được đồ thị G_1 gồm hai đường P_5 and P_4 , với $D(G_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Đánh nhãn lại các đỉnh và áp dụng phương pháp DVE trên P_5 , sau đó trên P_4 , ta thu được đồ thị G_2 với hai

đường P_2 và một đường P_4 . Không thể áp dụng phương pháp DVE trên P_2 hoặc P_4 , vì chúng ta sẽ thu được đồ thị phân tán. Do đó,

$$\text{Stab}_d(T_{6,4}) = 1 + \text{Stab}_d(P_5) + \text{Stab}_d(P_4) = 1 + 1 + 0 = 2.$$



Hình 2. Dãy các đồ thị con G_0, G_1, G_2 của $T_{6,4}$.

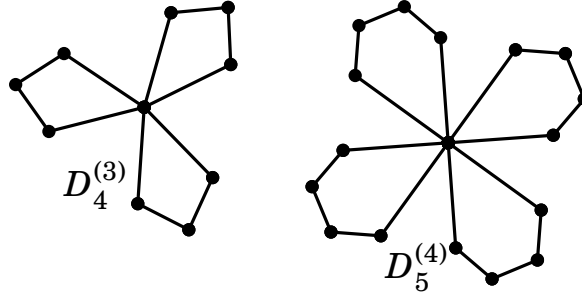
Ví dụ 4.2.7. Trong Ví dụ 4.2.6, tập đỉnh trội của G_0 là $D(G_0) = \{x_1\}$ với $Q_{G_0} = (x_1^3, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2, x_6^2, x_7^2, x_8^2, x_9^2, x_{10})$ và $\gamma(G_0) = 11$. Đánh nhãn lại các đỉnh, ta có $D(G_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ với $Q_{G_1} = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2, x_6, x_7, x_8, x_9)$ và $\gamma(G_1) = 6$. $D(G_2) = \{x_1, x_2\}$ với $Q_{G_2} = (x_1^2, x_2^2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ và $\gamma(G_2) = 2$. Sử dụng Macaulay 2, ta có

$$\begin{aligned} I_D(T_{6,4}) = & (x_8x_{10}, x_7x_{10}, x_6x_{10}, x_8^2, x_7^2, x_6^2, x_5^2, x_4^2x_3^2, x_2^2, x_5x_9x_{10}, x_4^2x_3^2, \\ & x_2^2, x_5x_9x_{10}, x_4x_9x_{10}, x_3x_9x_{10}, x_1^2x_{10}, x_8x_{10}^2, x_7x_{10}^2, x_6x_{10}^2, \\ & x_5x_{10}^2, x_4x_{10}^2, x_3x_{10}^2, x_1^3, x_1^2x_9^2) \end{aligned}$$

và $\text{reg}(I_D(T_{6,4})) = 11$. Vậy chặn trên mà chúng ta thu được trong Định lý 4.2.5 là chặt.

Tiếp theo, chúng ta tính chỉ số ổn định bậc của lớp đồ thị cối xay gió Hà Lan. Từ đó, chúng ta thiết lập chặn trên cho chỉ số chính quy của ideal khủ liên kết với lớp đồ thị này.

Định nghĩa 4.2.8. Đồ thị cối xay gió Hà Lan (Dutch windmill) $D_n^{(m)}$ với $n \geq 3$ và $m \geq 2$ là đồ thị đơn, hữu hạn, liên thông đạt được bằng cách ghép m chu trình C_n chung nhau tại 1 đỉnh. Đồ thị $D_n^{(m)}$ có $m(n-1)+1$ đỉnh. Khi $n = 3$, $D_3^{(m)}$ là đồ thị bạn bè.



Hình 3. Các đồ thị cối xay gió Hà Lan $D_4^{(3)}$ (trái) và $D_5^{(4)}$ (phải).

Bổ đề 4.2.9. Giả sử $D_n^{(m)}$ là đồ thị cối xay gió Hà Lan với $n \geq 3$ và $m \geq 2$. Khi đó,

$$\text{Stab}_d(D_n^{(m)}) = \begin{cases} \frac{m(n-3)+3}{3} & \text{nếu } n \equiv 0 \pmod{3}; \\ \frac{m(n-4)+3}{3} & \text{nếu } n \equiv 1 \pmod{3}; \\ \frac{m(n-5)+3}{3} & \text{nếu } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Chứng minh. Đồ thị cối xay gió Hà Lan $G_0 = D_n^{(m)}$ có một đỉnh bậc $2m$ và $m(n-1)$ đỉnh bậc 2. Do đó, $D(G_0)$ chỉ chứa một phần tử, giả sử phần tử này là x_1 . Áp dụng phương pháp DVE trên G_0 , bỏ đi đỉnh x_1 , chúng ta thu được đồ thị G_1 gồm m đồ thị đường P_{n-1} . Không mất tính tổng quát, chúng ta áp dụng phương pháp DVE lần lượt trên mỗi đồ thị đường P_{n-1} , ta có

$$\text{Stab}_d(D_n^{(m)}) = 1 + m\text{Stab}_d(P_{n-1}).$$

Theo [4, Theorem 2.10], chúng ta thu được kết quả. $\square$

Bổ đề 4.2.10. Giả sử $D_n^{(m)}$ là đồ thị cối xay gió Hà Lan với $n \geq 3$ và $m \geq 2$. Khi đó, các idêan dây được xác định như sau

$$Q_{G_i} = \begin{cases} (x_1^{2m}, x_2^2, \dots, x_{m(n-1)+1}^2) & \text{nếu } i = 0; \\ (x_1^2, \dots, x_{m(n-3)-3(i-1)}^2, x_{m(n-3)-3(i-1)+1}, \dots, x_{m(n-1)+1-i}) & \text{nếu } i = 1, \dots, r; \end{cases}$$

với $r = \text{Stab}_d(D_n^{(m)})$.

Chứng minh. Xét $G_0 = D_n^{(m)}$ là đồ thị cối xay gió Hà Lan, ta có dãy bậc của nó là $d_0 = (2m, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m(n-1)})$ và $D(G_0) = \{x_1\}$. Sử dụng phương pháp DVE trên G_0 , chúng ta thu được đồ thị G_1 và dãy bậc của nó được xác định là $d_1 = (\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m(n-3)}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2m})$. Vì G_1 gồm m đồ thị đường P_{n-1} , sử dụng phương

pháp DVE lần lượt trên các đường P_{n-1} , tại mỗi bước chúng ta thu được một đồ thị mới có được từ đồ thị trước đó với ba đỉnh bậc 2 bị mất đi và xuất hiện hai đỉnh bậc 1. Chúng ta thu được dãy liên tiếp các đồ thị con $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_r$ với dãy bậc của các đồ thị G_i tương ứng là $d_i = (\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m(n-3)-3(i-1)}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2m+2(i-1)})$, gồm $m(n-1)+1-i$ thành phần. Do đó, các idêan dãy Q_{G_i} được xác định bởi

$$Q_{G_0} = (x_1^{2m}, x_2^2, \dots, x_{m(n-1)+1}^2)$$

và

$$Q_{G_i} = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_{m(n-3)-3(i-1)}^2, x_{m(n-3)-3(i-1)+1}, \dots, x_{m(n-1)+1-i})$$

với $i = 1, \dots, r$, trong đó $r = \text{Stab}_d(D_n^{(m)})$. $\square$

Định lý 4.2.11. *Giả sử $D_n^{(m)}$ là đồ thị cối xay gió Hà Lan với $n \geq 3$ và $m \geq 2$. Khi đó,*

$$\text{reg}(I_D(D_n^{(m)})) \leq (n+1)m.$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 4.2.9, đặt $\text{Stab}_d(D_n^{(m)}) = r$ với $n \geq 3, m \geq 2$. Theo Bổ đề 4.2.10, các idêan dãy là

$$Q_{G_i} = \begin{cases} (x_1^{2m}, x_2^2, \dots, x_{m(n-1)+1}^2) & \text{nếu } i = 0; \\ (x_1^2, \dots, x_{m(n-3)-3(i-1)}^2, x_{m(n-3)-3(i-1)+1}, \dots, x_{m(n-1)+1-i}) & \text{nếu } i = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Do đó, idêan khử của $D_n^{(m)}$ là $I_D(D_n^{(m)}) = \bigcap_{i=0}^r Q_{G_i}$ trong đó $r = \text{Stab}_d(D_n^{(m)})$. Chúng ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. Với $i = 0$, đặt $\gamma(G_0) = m(n+1)$, chúng ta chứng minh $Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ là ổn định. Xét $u \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ thì $u = vx_j^{a_j}$ với j nào đó thỏa $j \in \{1, \dots, m(n-1)+1\}$ và $v \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)-a_j}$, trong đó

$$a_j = \begin{cases} 2m, & \text{nếu } j = 1; \\ 2, & \text{nếu } j = 2, \dots, m(n-1)+1. \end{cases}$$

Nếu $m(u) > j$ thì $\frac{x_k u}{x_{m(u)}} = \frac{x_k v}{x_{m(u)}} x_j^{a_j} \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ với mọi $k < m(u)$. Do đó, $Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ là ổn định.

Nếu $m(u) = j$ thì rõ ràng $u \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)}$ với $(x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)}$ là ổn định. Do đó, $Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)} \subseteq (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)}$. Chúng ta sẽ chứng minh $(x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)} \subseteq Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$. Xét $w \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)}$ thì $w =$

$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{m(n-1)+1}^{\alpha_{m(n-1)+1}}$ với $\alpha_t \geq 0$ với mọi t và $\sum_{t=1}^{m(n-1)+1} \alpha_t \geq \gamma(G_0)$. Giả sử $\alpha_1 < 2m$ và $\alpha_t < 2$ với mọi $t = 2, \dots, m(n-1)+1$, suy ra $\sum_{t=1}^{m(n-1)+1} \alpha_t \leq m(n+1)-1$ (mâu thuẫn). Do đó, $\alpha_1 \geq 2m$ hoặc tồn tại một số nguyên $k \in \{2, \dots, m(n-1)+1\}$ sao cho $\alpha_k \geq 2$. Hay có thể viết $w = x_k^{\alpha_k} w_1$, suy ra $w \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$. Khẳng định được chứng minh xong.

Trường hợp 2. Với $i = 1, \dots, r$, đặt $\gamma(G_i) = m(n-3) - 3i + 4$. Ta có $Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ là ổn định. Thật vậy, xét $u \in Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ thì $u = vx_j^{a_j}$ với j nào đó, $j \in \{1, \dots, m(n-1)+1-i\}$ và $v \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)-a_j}$ trong đó

$$a_j = \begin{cases} 2 & \text{nếu } j = 1, \dots, m(n-3) - 3(i-1); \\ 1 & \text{nếu } j = m(n-3) - 3(i-1) + 1, \dots, m(n-1) + 1 - i. \end{cases}$$

Nếu $m(u) > j$ thì $\frac{x_k u}{x_{m(u)}} = \frac{x_k v}{x_{m(u)}} x_j^{a_j} \in Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ với mọi $k < m(u)$. Do đó, $Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ là ổn định.

Nếu $m(u) = j$ thì $u \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)}$, với $(x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)}$ là ổn định và

$$Q_{G_i \geq \gamma(G_i)} \subseteq (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)}.$$

Chúng ta khẳng định $(x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)} \subseteq Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$. Thật vậy, xét $w \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)}$ thì $w = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{m(n-1)+1-i}^{\alpha_{m(n-1)+1-i}}$ với $\alpha_t \geq 0$ với mọi t và

$$\sum_{t=1}^{m(n-1)+1-i} \alpha_t \geq \gamma(G_i).$$

Giả sử $\alpha_i < 2$ với mọi $i = 1, \dots, m(n-3) - 3(i-1)$ và $\alpha_t < 1$ với mọi $t = m(n-3) - 3(i-1) + 1, \dots, m(n-1) + 1 - i$, suy ra $\sum_{t=1}^{m(n-1)+1-i} \alpha_t \leq m(n-3) - 3i + 3$ (mâu thuẫn). Do đó, tồn tại $k \in \{1, \dots, m(n-3) - 3(i-1)\}$ sao cho $\alpha_k \geq 2$ hoặc tồn tại $k \in \{m(n-3) - 3(i-1) + 1, \dots, m(n-1) + 1 - i\}$ sao cho $\alpha_k \geq 1$. Hay có thể viết $w = x_k^{\alpha_k} w_1$, suy ra $w \in Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$.

Từ Bổ đề 4.1.6, ta có $(I_D(D_n^{(m)}))_{\geq \gamma_0}$ là ổn định với

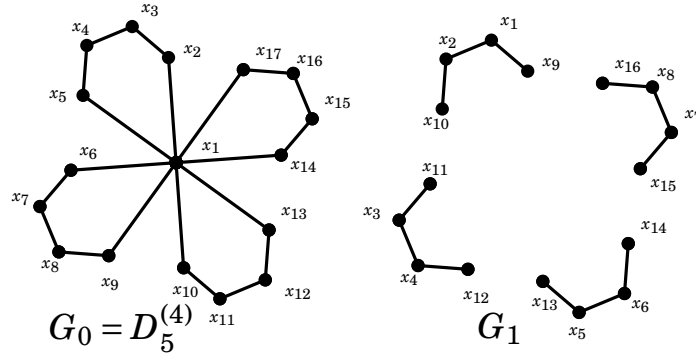
$$\gamma_0 = \max\{\gamma(G_i) \mid i = 0, \dots, r\} = m(n+1).$$

Theo Định lý 4.1.7, ta có

$$\text{reg}(I_D(D_n^{(m)})) \leq m(n+1).$$

□

Ví dụ 4.2.12 (Hình 4). Xét đồ thị cối xay gió Hà Lan $D_5^{(4)}$, ta có $D(G_0) = \{x_1\}$. Áp dụng phương pháp DVE trên G_0 , ta thu được đồ thị G_1 gồm 4 đường P_4 với $D(G_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$. Chúng ta không thể áp dụng phương pháp DVE trên các P_4 vì sẽ thu được đồ thị phân tán. Do đó, $\text{Stab}_D(I_D(D_5^{(4)})) = 1$.



Hình 4. Dãy liên tiếp các đồ thị con G_0, G_1 của $D_5^{(4)}$.

Ví dụ 4.2.13. Trong Ví dụ 4.2.12, $D(G_0) = \{x_1\}$ với

$$Q(G_0) = (x_1^8, x_2^2, x_3^2, \dots, x_{16}^2, x_{17}^2)$$

và $\gamma(G_0) = 24$. $D(G_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ với $Q_{G_1} = (x_1^2, \dots, x_8^2, x_9, \dots, x_{16})$ và $\gamma(G_1) = 1$. Do đó, $\text{reg}(I_D(D_5^{(4)})) \leq 24$.

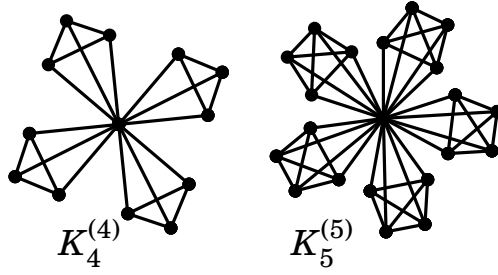
Khi $n = 3$, ta có $D_3^{(m)}$ là đồ thị bện bẻ $\mathcal{F}_m$. Chúng ta thu được hệ quả sau đây.

Hệ quả 4.2.14 ([4, Theorem 3.16]). *Giả sử $\mathcal{F}_m$ là đồ thị bện bẻ với $m \geq 2$. Khi đó,*

$$\text{reg}(I_D(\mathcal{F}_m)) \leq 4m.$$

Phần tiếp theo, chúng ta tính toán chỉ số ổn định bậc của đồ thị cối xay gió và thiết lập chặn trên của chỉ số chính quy của ideal khử liên kết với lớp đồ thị này.

Định nghĩa 4.2.15. Đồ thị cối xay gió (windmill) $W_n^{(m)}$ với $n \geq 3$ và $m \geq 2$ là đồ thị hữu hạn, đơn, liên thông đạt được bằng cách ghép m đồ thị đầy đủ K_n chung nhau tại 1 đỉnh. Đồ thị $W_n^{(m)}$ có $m(n-1)+1$ đỉnh.



Hình 5. Các đồ thị cối xay gió $W_4^{(4)}$ (trái) và $W_5^{(5)}$ (phải)

Bổ đề 4.2.16. Giả sử $W_n^{(m)}$ là đồ thị cối xay gió với $n \geq 3$ và $m \geq 2$. Khi đó,

$$\text{Stab}_d(W_n^{(m)}) = m(n-3) + 1.$$

Chứng minh. Đồ thị cối xay gió $G_0 = W_n^{(m)}$ gồm một đỉnh có bậc $m(n-1)$ và các đỉnh còn lại có bậc $n-1$. Áp dụng phương pháp DVE trên G_0 , ta thu được đồ thị G_1 gồm m đồ thị đầy đủ K_{n-1} và mỗi đỉnh trong G_1 có bậc $n-2$. Không mất tính tổng quát, áp dụng phương pháp DVE trên G_1 , chúng ta có thể bỏ đi 1 đỉnh bất kỳ từ một đồ thị đầy đủ nào đó trong G_1 và đồ thị G_2 . Đồ thị G_2 gồm $m-1$ đồ thị đầy đủ K_{n-1} và một đồ thị K_{n-2} . Tiếp tục quá trình trên cho $m-1$ đồ thị K_{n-1} còn lại, ta thu được đồ thị G_m gồm m đồ thị đầy đủ K_{n-2} . Tiếp tục quá trình như vậy, ta có

$$\text{Stab}_d(W_n^{(m)}) = m(n-3) + 1.$$

□

Bổ đề 4.2.17. Giả sử $W_n^{(m)}$ là đồ thị cối xay gió với $n \geq 3$ và $m \geq 2$. Khi đó, các iđêan dây được xác định như sau

$$Q_{G_0}(W_n^{(m)}) = (x_1^{m(n-1)}, x_2^{n-1}, \dots, x_{m(n-1)+1}^{n-1})$$

và

$$Q_{G_{p+km}}(W_n^{(m)}) = (x_1^{n-k-2}, \dots, x_{(m-p+1)(n-k-1)}^{n-k-2}, x_{(m-p+1)(n-k-1)+1}^{n-k-3}, \dots, x_{m(n-1)+1-(p+km)}^{n-k-3})$$

với $p = 1, \dots, m$; $k = 0, \dots, n-4$ và

$$Q_{G_{1+(n-3)m}}(W_n^{(m)}) = (x_1, \dots, x_{2m}).$$

Chứng minh. Xét $G_0 = W_n^{(m)}$ là đồ thị cối xay gió, dãy bậc của nó là $d_0 = (m(n-1), \underbrace{n-1, n-1, \dots, n-1}_{m(n-1)})$. Theo chứng minh của Bổ đề 4.2.16, đồ thị

G_1 thu được có dãy bậc $d_1 = \underbrace{(n-2, n-2, \dots, n-2)}_{m(n-1)}$. Sử dụng phương pháp DVE, ta thu được đồ thị G_2 có dãy bậc

$$d_2 = \underbrace{(n-2, n-2, \dots, n-2)}_{(m-1)(n-1)}, \underbrace{(n-3, n-3, \dots, n-3)}_{(n-2)}.$$

Sử dụng phương pháp DVE lần lượt, ta thu được G_m có dãy bậc

$$d_m = \underbrace{(n-2, n-2, \dots, n-2)}_{n-1}, \underbrace{(n-3, n-3, \dots, n-3)}_{(m-1)(n-2)}.$$

Tương tự ta có dãy bậc của G_{m+1} là $d_{m+1} = \underbrace{(n-3, n-3, \dots, n-3)}_{m(n-2)}$. Tiếp tục quá trình này, chúng ta thu được dãy liên tiếp các đồ thị con

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_{p+km} \supset \dots \supset G_{m(n-3)} \supset G_{m(n-3)+1},$$

với dãy bậc của G_{p+km} là

$$d_{p+km} = \underbrace{(n-k-2, \dots, n-k-2)}_{(m-p+1)(n-k-1)}, \underbrace{(n-k-3, \dots, n-k-3)}_{(p-1)(n-k-2)},$$

gồm $m(n-1) + 1 - (p+km)$ thành phần với $p = 1, \dots, m$ và $k = 0, \dots, n-4$. Và đồ thị con cuối cùng của dãy trên có dãy bậc là $d_r = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{2m}$, với $r = m(n-3) + 1$. Do đó, các idêan dãy được xác định như sau

$$Q_{G_0}(W_n^{(m)}) = (x_1^{m(n-1)}, x_2^{n-1}, \dots, x_{m(n-3)+1}^{n-1}),$$

$$Q_{G_{p+km}}(W_n^{(m)}) = (x_1^{n-k-2}, \dots, x_{(m-p+1)(n-k-1)}^{n-k-2}, x_{(m-p+1)(n-k-1)+1}^{n-k-3}, \dots, x_{m(n-1)+1-(p+km)}^{n-k-3})$$

với $p = 1, \dots, m$; $k = 0, \dots, n-4$ và

$$Q_{G_{1+(n-3)m}}(W_n^{(m)}) = (x_1, \dots, x_{2m}).$$

□

Định lý 4.2.18. Giả sử $W_n^{(m)}$ là đồ thị còi xay gió với $n \geq 3$ và $m \geq 2$. Khi đó,

$$\text{reg}(I_D(W_n^{(m)})) \leq m(n-1)^2.$$

Chứng minh. Đặt $r = \text{Stab}(W_n^{(m)}) = m(n-3) + 1$ với $n \geq 3, m \geq 2$. Theo Bổ đề 4.2.17, các idêan dãy được xác định bởi

$$Q_{G_0}(W_n^{(m)}) = (x_1^{m(n-1)}, x_2^{n-1}, \dots, x_{m(n-1)+1}^{n-1})$$

và

$$Q_{G_{p+km}}(W_n^{(m)}) = (x_1^{n-k-2}, \dots, x_{(m-p+1)(n-k-1)}^{n-k-2}, x_{(m-p+1)(n-k-1)+1}^{n-k-3}, \dots, x_{m(n-1)+1-(p+km)}^{n-k-3})$$

với $p = 1, \dots, m; k = 0, \dots, n-4$ và

$$Q_{G_{1+(n-3)m}}(W_n^{(m)}) = (x_1, \dots, x_{2m}).$$

Do đó, idêan khủ của $W_n^{(m)}$ là $I_D(W_n^{(m)}) = \bigcap_{i=0}^r Q_{G_i}$ với $r = \text{Stab}_d(W_n^{(m)})$. Chúng ta xét ba trường hợp sau đây.

Trường hợp 1. Với $i = 0$, đặt $\gamma(G_0) = m(n-1)^2$, chúng ta sẽ chứng minh $Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ là ổn định. Thật vậy, xét $u \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ thì $u = vx_j^{a_j}$ với j nào đó, $j \in \{1, \dots, m(n-1)+1\}$ và $v \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)-a_j}$, trong đó

$$a_j = \begin{cases} m(n-1) & \text{nếu } j = 1; \\ n-1 & \text{nếu } j = 2, \dots, m(n-1)+1. \end{cases}$$

Nếu $m(u) > j$ thì $\frac{x_k u}{x_{m(u)}} = \frac{x_k v}{x_{m(u)}} x_j^{a_j} \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ với mọi $k < m(u)$. Do đó, $Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ là ổn định.

Nếu $m(u) = j$ thì $u \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)}$, với $(x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)}$ là ổn định và

$$Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)} \subseteq (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)}.$$

Ta có $(x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)} \subseteq Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$. Thật vậy, với $w \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1})^{\gamma(G_0)}$ khi đó $w = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{m(n-1)+1}^{\alpha_{m(n-1)+1}}$ với $\alpha_t \geq 0$ với mọi t và $\sum_{t=1}^{m(n-1)+1} \alpha_t \geq \gamma(G_0)$. Giả sử $\alpha_1 < m(n-1)$ và $\alpha_t < n-1$ với mọi $t = 2, \dots, m(n-1)+1$, suy ra $\sum_{t=1}^{m(n-1)+1} \alpha_t \leq m(n-1)^2 - 1$ (mâu thuẫn). Do đó, $\alpha_1 \geq m(n-1)$ hoặc tồn tại $k \in \{2, \dots, m(n-1)+1\}$ sao cho $\alpha_k \geq n-1$. Hay có thể viết $w = x_k^{a_k} w_1$, từ đây suy ra $w \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$.

Trường hợp 2. Với $i = p+km$ trong đó $p = 1, \dots, m$ và $k = 0, \dots, n-4$ thì $1 \leq i \leq m(n-3)$, đặt

$$\gamma(G_i) = \gamma(G_{p+km}) = (m-p-1)(n-k-1)(n-k-3) + (p-1)(n-k-2)(n-k-4) + 1.$$

Ta chứng minh $Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ là ổn định. Xét $u \in Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ ta có $u = vx_j^{a_j}$ với j nào đó, $j \in \{1, \dots, m(n-1)+1-i\}$ và $v \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)-a_j}$, trong đó

$$a_j = \begin{cases} n-k-2 & \text{nếu } j = 1, \dots, (m-p+1)(n-k-1); \\ n-k-3 & \text{nếu } j = (m-p+1)(n-k-1)+1, \dots, m(n-1)+1-i. \end{cases}$$

Nếu $m(u) > j$ thì $\frac{x_k u}{x_{m(u)}} = \frac{x_k v}{x_{m(u)}} x_j^{a_j} \in Q_{G_{i \geq \gamma(G_i)}}$ với mọi $k < m(u)$. Do đó, $Q_{G_{i \geq \gamma(G_i)}}$ là ổn định.

Nếu $m(u) = j$ thì $u \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)}$, với $(x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)}$ là ổn định và $Q_{G_{i \geq \gamma(G_i)}} \subseteq (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)}$. Chúng ta sẽ chứng minh

$$(x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)} \subseteq Q_{G_{i \geq \gamma(G_i)}}.$$

Xét $w \in (x_1, \dots, x_{m(n-1)+1-i})^{\gamma(G_i)}$, khi đó $w = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{m(n-1)+1-i}^{\alpha_{m(n-1)+1-i}}$ với $\alpha_t \geq 0$ với mọi t và $\sum_{t=1}^{m(n-1)+1-i} \alpha_t \geq \gamma(G_i)$. Giả sử $\alpha_t < n-k-2$ với mọi $t = 1, \dots, (m-p+1)(n-k-1)$ và $\alpha_t < n-k-3$ với mọi $t = (m-p+1)(n-k-1)+1, \dots, m(n-1)+1-i$, suy ra

$$\sum_{t=1}^{m(n-1)+1-i} \alpha_t \leq (m-p-1)(n-k-1)(n-k-3) + (p-1)(n-k-2)(n-k-4),$$

điều này là mâu thuẫn. Do đó, tồn tại một số nguyên $l \in \{1, \dots, m(n-3) - 3(i-1)\}$ sao cho $\alpha_l \geq n-k-2$ hoặc tồn tại $l \in \{m(n-3) - 3(i-1) + 1, \dots, m(n-1) + 1 - i\}$ sao cho $\alpha_l \geq n-k-3$. Khi đó, chúng ta có thể viết $w = x_l^{a_l} w_1$. Từ đây suy ra $w \in Q_{G_{i \geq \gamma(G_i)}}$.

Trường hợp 3. Với $i = r = m(n-3) + 1$, đặt $\gamma(G_r) = 1$. Tương tự chứng minh trên, ta có $Q_{G_{r \geq \gamma(G_r)}}$ là ổn định.

Theo Bổ đề 4.1.6, ta có $(I_D(W_n^{(m)}))_{\geq \gamma_0}$ là ổn định, trong đó

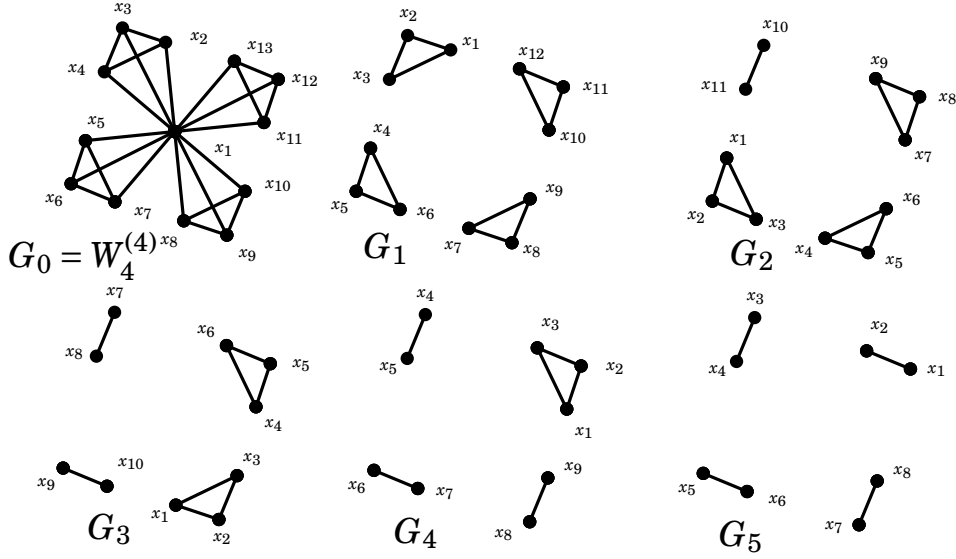
$$\gamma_0 = \max\{\gamma(G_i) \mid i = 0, \dots, r\} = m(n-1)^2.$$

Theo Định lý 4.1.7, ta có

$$\text{reg}(I_D(W_n^{(m)})) \leq m(n-1)^2.$$

□

Ví dụ 4.2.19 (Hình 6). Áp dụng phương pháp DVE trên đồ thị $W_4^{(4)}$, ta có $\text{Stab}_d(W_4^{(4)}) = 5$.



Hình 6. Dãy các đồ thị con liên tiếp $G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$ của $W_4^{(4)}$.

Ví dụ 4.2.20 (Hình 6). Áp dụng phương pháp DVE trên đồ thị $W_4^{(4)}$, ta có $D(G_0) = \{x_1\}$ với $Q_{G_0} = (x_1^{12}, x_2^3, x_3^3, \dots, x_{13}^3)$ và $\gamma(G_0) = 36$. $D(G_1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}\}$ với $Q_{G_1} = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots, x_{12}^2)$ và $\gamma(G_1) = 13$. $D(G_2) = \{x_1, x_2, \dots, x_9\}$ với $Q_{G_2} = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_9^2, x_{10}, x_{11})$ và $\gamma(G_2) = 10$. $D(G_3) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_5, x_6\}$ với $Q_{G_3} = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_5^2, x_6^2, x_7, x_8, x_9, x_{10})$ và $\gamma(G_3) = 7$. $D(G_4) = \{x_1, x_2, x_3\}$ với

$$Q_{G_4} = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$$

và $\gamma(G_4) = 4$. $D(G_5) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ với $Q_{G_5} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ và $\gamma(G_5) = 1$. Do đó, $\text{reg}(I_D(W_4^{(4)})) \leq 36$.

Khi $n = 4, m = 2$, ta có $W_4^{(2)}$ đẳng cấu với đồ thị 3-nón kép, do đó ta thu được hệ quả sau.

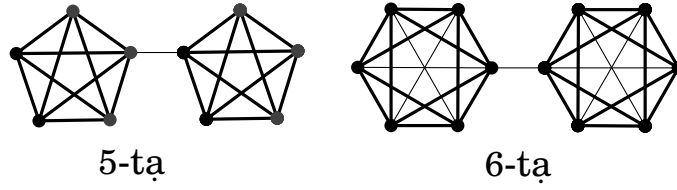
Hệ quả 4.2.21. Giả sử G là đồ thị 3-nón kép. Khi đó,

$$\text{reg}(I_D(G)) \leq 18.$$

Khi $n = 3$, suy ra $W_3^{(m)}$ đẳng cấu với đồ thị bạn bè, ta cũng thu được Hệ quả 4.2.14.

Cuối cùng, chúng ta tính chỉ số ổn định bậc của đồ thị n -tạ và thiết lập chặn cho chỉ số chính quy của ideal khử liên kết với lớp đồ thị này.

Định nghĩa 4.2.22. Đồ thị n -tạ với $n \geq 3$ là đồ thị hữu hạn, đơn, liên thông đạt được bằng cách nối hai đồ thị đầy đủ K_n bởi một cạnh.



Hình 7. Các đồ thị 5-tà (trái) và 6-tà (phải).

Bổ đề 4.2.23. Giả sử G là đồ thị n -tạ với $n \geq 3$. Khi đó,

$$\text{Stab}_d(G) = 2n - 4.$$

Chứng minh. Giả sử G là đồ thị n -tạ, gồm hai đỉnh bậc n và các đỉnh còn lại có bậc $n - 1$. Áp dụng phương pháp DVE, ta thu được đồ thị G_1 gồm hai thành phần liên thông là hai đồ thị đầy đủ K_{n-1} và K_n . Tiếp tục quá trình này và theo [4, Proposition 2.7], ta có

$$\text{Stab}_d(G) = 1 + \text{Stab}_d(K_n) + \text{Stab}(K_{n-1}) = 2n - 4.$$

□

Bổ đề 4.2.24. Giả sử G là đồ thị n -tạ với $n \geq 3$. Khi đó, các idêan dãy được xác định như sau

$$Q_{G_0}(G) = (x_1^n, x_2^n, x_3^{n-1}, \dots, x_{2n}^{n-1})$$

và

$$Q_{G_i}(G) = \begin{cases} (x_1^{n-(\frac{i}{2}+1)}, \dots, x_{2n-i}^{n-(\frac{i}{2}+1)}) & \text{nếu } i \text{ chẵn;} \\ (x_1^{n-\frac{i+1}{2}}, \dots, x_{n-\frac{i+1}{2}+1}^{n-\frac{i+1}{2}}, x_{n-\frac{i+1}{2}+2}^{n-\frac{i+1}{2}-1}, \dots, x_{2n-i}^{n-\frac{i+1}{2}-1}) & \text{nếu } i \text{ lẻ;} \end{cases}$$

với $i = 1, \dots, r$, trong đó $r = \text{Stab}_d(G)$.

Chứng minh. Đồ thị n -tạ có dãy bậc $d_0 = (n, n, \underbrace{n-1, n-1, \dots, n-1}_{2n-2})$, gồm 2

đỉnh bậc n và $2n - 2$ đỉnh bậc $n - 1$. Áp dụng phương pháp DVE, ta thu được đồ thị con G_1 có dãy bậc $d_1 = (\underbrace{n-1, n-1, \dots, n-1}_n, \underbrace{n-2, n-2, \dots, n-2}_{n-1})$

và $D(G_1) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Áp dụng phương pháp DVE trên G_1 , ta thu được G_2 với dãy bậc $d_2 = (\underbrace{n-2, n-2, \dots, n-2}_{2(n-1)})$. Tiếp tục quá trình này, ta thu

được dãy liên tiếp các đồ thị con

$$G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_r,$$

trong đó dãy bậc của G_i tương ứng là

$$d_i = (n - (\frac{i}{2} + 1), \dots, n - (\frac{i}{2} + 1))$$

nếu i chẵn và

$$d_i = (\underbrace{n - \frac{i+1}{2}, \dots, n - \frac{i+1}{2}}_{n - \frac{i+1}{2} + 1}, \underbrace{n - \frac{i+1}{2} - 1, \dots, n - \frac{i+1}{2} - 1}_{n - \frac{i+1}{2}})$$

nếu i lẻ với $2n - i$ thành phần. Do đó, khẳng định được chứng minh. $\square$

Định lý 4.2.25. *Giả sử G là đồ thị n -tạ với $n \geq 3$. Khi đó,*

$$\text{reg}(I_D(G)) \leq 2(n-1)^2 + 1.$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 4.2.23, ta có $\text{Stab}_d(G) = 2n - 4$. Theo Bổ đề 4.2.24, idêan dãy là

$$Q_{G_0}(G) = (x_1^n, x_2^n, x_3^{n-1}, \dots, x_{2n}^{n-1})$$

và

$$Q_{G_i}(G) = \begin{cases} (x_1^{n-(\frac{i}{2}+1)}, \dots, x_{2n-i}^{n-(\frac{i}{2}+1)}), & \text{nếu } i \text{ chẵn;} \\ (x_1^{n-\frac{i+1}{2}}, \dots, x_{n-\frac{i+1}{2}+1}^{n-\frac{i+1}{2}}, x_{n-\frac{i+1}{2}+2}^{n-\frac{i+1}{2}-1}, \dots, x_{2n-i}^{n-\frac{i+1}{2}-1}), & \text{nếu } i \text{ lẻ;} \end{cases}$$

với $i = 1, \dots, 2n - 4$. Do đó, idêan khử của G là $I_D(G) = \bigcap_{i=0}^{2n-4} Q_{G_i}$. Ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. Với $i = 0$, đặt $\gamma(G_0) = 2(n-1)^2 + 1$, ta sẽ chứng minh $Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ là ổn định. Thật vậy, xét $u \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ ta có $u = vx_j^{a_j}$ với j nào đó, $j \in \{1, \dots, 2n\}$ và $v \in (x_1, \dots, x_{2n})^{\gamma(G_0) - a_j}$, trong đó

$$a_j = \begin{cases} n, & \text{nếu } j = 1, 2; \\ n-1, & \text{nếu } j = 3, \dots, 2n. \end{cases}$$

Nếu $m(u) > j$ thì $\frac{x_k u}{x_{m(u)}} = \frac{x_k v}{x_{m(u)}} x_j^{a_j} \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ với mọi $k < m(u)$. Do đó, $Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$ là ổn định.

Nếu $m(u) = j$ thì rõ ràng $u \in (x_1, \dots, x_{2n})^{\gamma(G_0)}$, với $(x_1, \dots, x_{2n})^{\gamma(G_0)}$ là idêan ổn định và $Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)} \subseteq (x_1, \dots, x_{2n})^{\gamma(G_0)}$. Ta cần chứng minh $(x_1, \dots, x_{2n})^{\gamma(G_0)} \subseteq Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$. Xét $w \in (x_1, \dots, x_{2n})^{\gamma(G_0)}$ thì $w = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{2n}^{\alpha_{2n}}$ với $\alpha_t \geq 0$ với mọi $t = 1, \dots, 2n$ và $\sum_{t=1}^{2n} \alpha_t \geq \gamma(G_0)$. Giả sử $\alpha_t < n$ với mọi $t = 1, 2$ và $\alpha_t < n-1$ với mọi $t = 3, \dots, 2n$, suy ra $\sum_{t=1}^{2n} \alpha_t \leq 2(n-1)^2$ (mâu thuẫn). Do đó, $\alpha_1 \geq n$

hoặc $\alpha_2 \geq n$ hoặc tồn tại $k \in \{3, \dots, 2n\}$ sao cho $\alpha_k \geq n - 1$. Khi đó, chúng ta có thể viết $w = x_k^{\alpha_k} w_1$, từ đây suy ra $w \in Q_{G_0 \geq \gamma(G_0)}$.

Trường hợp 2. Với $i = 2, \dots, 2n - 4$, đặt

$$\gamma(G_i) = (2n - i)(n - \frac{i}{2} - 2) + 1.$$

Chúng ta sẽ chứng minh $Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ là ổn định. Xét $u \in Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ thì $u = vx_j^{a_j}$ với j nào đó, $j \in \{1, \dots, 2n - i\}$ và $v \in (x_1, \dots, x_{2n-i})^{\gamma(G_i) - a_j}$, trong đó $a_j = n - (\frac{i}{2} + 1)$ với mọi $j = 1, \dots, 2n - i$.

Nếu $m(u) > j$ thì $\frac{x_k u}{x_{m(u)}} = \frac{x_k v}{x_{m(u)}} x_j^{a_j} \in Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ với mọi $k < m(u)$. Do đó, $Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ là ổn định.

Nếu $m(u) = j$ thì rõ ràng $u \in (x_1, \dots, x_{2n-i})^{\gamma(G_i)}$, với $(x_1, \dots, x_{2n-i})^{\gamma(G_i)}$ là ổn định và $Q_{G_i \geq \gamma(G_i)} \subseteq (x_1, \dots, x_{2n-i})^{\gamma(G_i)}$. Ta sẽ chứng minh

$$(x_1, \dots, x_{2n-i})^{\gamma(G_i)} \subseteq Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}.$$

Xét $w \in (x_1, \dots, x_{2n-i})^{\gamma(G_i)}$ thì $w = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{2n-i}^{\alpha_{2n-i}}$ với $\alpha_t \geq 0$ với mọi t và $\sum_{t=1}^{2n-i} \alpha_t \geq \gamma(G_i)$. Giả sử $\alpha_t < n - (\frac{i}{2} + 1)$ với mọi $t = 1, \dots, 2n - i$ khi đó

$$\sum_{t=1}^{2n-i} \alpha_k \leq (2n - i)(n - \frac{i}{2} - 2),$$

điều này là mâu thuẫn. Do đó, tồn tại $k \in \{1, \dots, 2n - i\}$ sao cho $\alpha_k \geq n - (\frac{i}{2} + 1)$. Do đó, ta có thể viết $w = x_k^{\alpha_k} w_1$, từ đây suy ra $w \in Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$.

Trường hợp 3. Với $i = 1, 3, \dots, 2n - 5$, đặt

$$\gamma(G_i) = (n - \frac{i+1}{2} + 1)(n - \frac{i+1}{2} - 1) + (n - \frac{i+1}{2})(n - \frac{i+1}{2} - 2) + 1.$$

Chứng minh tương tự như trên, ta có $Q_{G_i \geq \gamma(G_i)}$ là ổn định.

Theo Bổ đề 4.1.6, ta có $(I_D(G))_{\geq \gamma_0}$ là ổn định, với

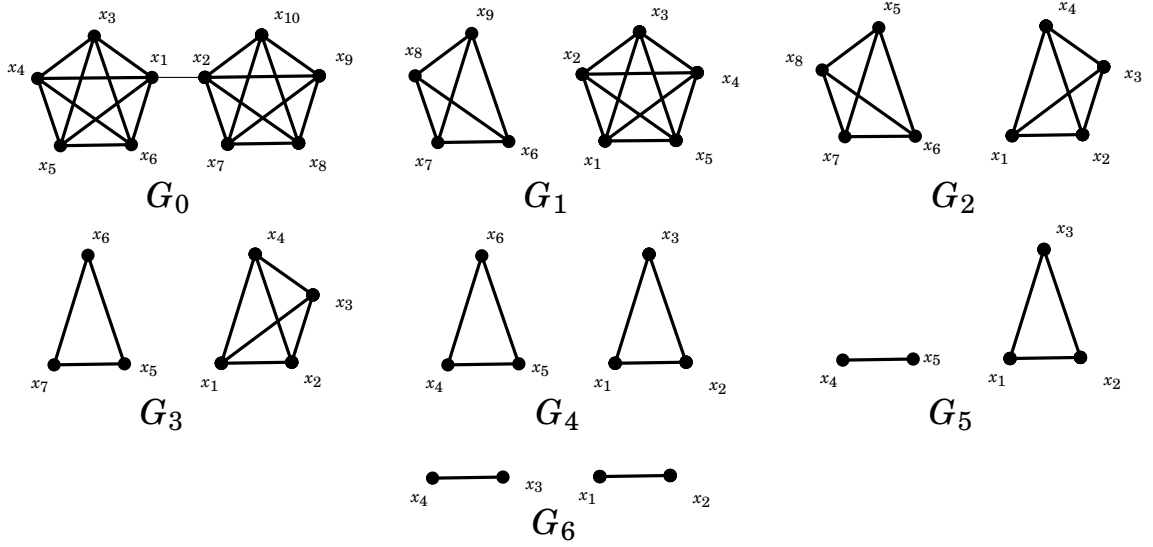
$$\gamma_0 = \max\{\gamma(G_i) \mid i = 0, \dots, r\} = 2(n - 1)^2 + 1.$$

Theo Định lý 4.1.7, ta có

$$\text{reg}(I_D(G)) \leq 2(n - 1)^2 + 1.$$

□

Ví dụ 4.2.26 (Hình 8). Áp dụng phương pháp DVE trên đồ thị 5-tạ, ta có $\text{Stab}_d(G) = 6$.



Hình 8. Dãy liên tiếp các đồ thị con $G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ của đồ thị 5-ta.

Ví dụ 4.2.27 (Hình 8). Áp dụng phương pháp DVE trên đồ thị 5-ta, ta có $D(G_0) = \{x_1, x_2\}$ với $Q_{G_0} = (x_1^5, x_2^5, x_3^4, x_4^4, x_5^4, x_6^4, x_7^4, x_8^4, x_9^4, x_{10}^4)$ và $\gamma(G_0) = 33$. $D(G_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ với $Q_{G_1} = (x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4, x_5^4, x_6^3, x_7^3, x_8^3, x_9^3)$ và $\gamma(G_1) = 24$. $D(G_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ với $Q_{G_2} = (x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3, x_5^3, x_6^3, x_7^3, x_8^3)$ và $\gamma(G_2) = 17$. $D(G_3) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ với $Q_{G_3} = (x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3, x_5^2, x_6^2, x_7^2)$ và $\gamma(G_3) = 12$. $D(G_4) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ với $Q_{G_4} = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2, x_6^2)$ và $\gamma(G_4) = 7$. $D(G_5) = \{x_1, x_2, x_3\}$ với $Q_{G_5} = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4, x_5)$ và $\gamma(G_5) = 4$. $D(G_6) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ với $Q_{G_6} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ và $\gamma(G_6) = 1$. Do đó, $\text{reg}(I_D(5\text{-ta})) \leq 33$.

Nhận xét 4.2.28. Vì idêan khủ là một idêan kiểu Borel. Chặn trên cho chỉ số chính quy của các idêan kiểu Borel được thiết lập bởi Ahmad-Anwar [3] và Cimpoeas [9]. Lưu ý, các chặn mà chúng tôi thu được là tốt hơn các chặn đã có ở [3] và [9] trong tất cả các trường hợp trên. Và chặn mà chúng tôi thu được là phụ thuộc vào yếu tố tổ hợp của đồ thị.

4.3 Kết luận Chương 4

Trong chương này, chúng tôi đã thiết lập chặn trên tổ hợp cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của idêan khủ liên kết với một số lớp đồ thị (Định lý 4.2.5, Định lý 4.2.11, Định lý 4.2.18, Định lý 4.2.25).

Kết luận

Tóm lại, trong luận án này chúng tôi đã đạt được một số kết quả như sau.

- Khảo sát tính không dương của các hệ số Hilbert của ideal m -nguyên sơ J với một số điều kiện của $\sigma(J)$.
- Thiết lập các chặn cho các hệ số Hilbert $e_i(Q), i \geq 2$ của ideal tham số Q theo hệ số Chern $e_1(Q)$ và chiều, không phụ thuộc số bội $e(Q)$.
- Thiết lập chặn tuyến tính cho chỉ số nhiều Hilbert $N(I, J)$ theo bậc đồng điều $\text{hdeg}(J, R/I)$ với J là ideal m -nguyên sơ.
- Chứng minh sự bảo toàn của hàm Hilbert-Samuel đối ngẫu liên kết với môđun đối Cohen-Macaulay.
- Tính các chỉ số ổn định bậc của một số lớp đồ thị đặc biệt. Từ đó, thiết lập các chặn trên tổ hợp cho chỉ số chính quy của ideal khử liên kết với các lớp đồ thị này.

Kiến nghị

Các bài toán mà chúng tôi tiếp tục nghiên cứu trong thời gian tới là bài toán nhiều của idêan trong vành địa phương và chỉ số chính quy của idêan khử liên kết với các đồ thị tổng quát hơn. Do đó, chúng tôi đề xuất một số câu hỏi như sau.

Câu hỏi 4.3.1. *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, J là idêan của R và $I = (f_1, \dots, f_r)$ là idêan sinh bởi dãy J -lọc chính quy. Khi đó, số Bass thứ i của R/I là*

$$\mu_i^R(R/I) = \dim_k(\mathrm{Ext}_R^i(k, R/I)).$$

Hỏi khi nhiều bởi idêan I thì các số Bass của R/I có được bảo toàn không?

Câu hỏi 4.3.2. *Có thể thu được một chặn tốt hơn cho chỉ số nhiều của [49, Định lý 3.5] không?*

Câu hỏi 4.3.3. *Nghiên cứu chỉ số chính quy của idêan khử liên kết với đồ thị cây?*

Danh mục các công trình của tác giả

- (1) C. H. Linh and T. T. Q. Tan, Bounds for Hilbert coefficients, *Taiwanese J. Math.* **25**(6) (2021), 1159-1172.
- (2) T. T. Q. Tan, Perturbation of Hilbert-Samuel function relative to an Artinian module, *Bull. Korean Math. Soc.* **62**(1) (2025), 59-70.
- (3) C. H. Linh and T. T. Q. Tan, Hilbert coefficients of ideals under perturbation of an ideal, *Hue University Journal of Science: Natural Science* **133**(1B) (2024), 125-130.
- (4) C. H. Linh and T. T. Q. Tan, Linear bound for the Hilbert perturbation index, submitted.
- (5) T. T. Q. Tan, Castelnuovo-Mumford regularity of elimination ideals associated to graphs, submitted.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại:

- (1) Hội nghị Toán học Miền Trung và Tây Nguyên 2022.
- (2) Bộ Môn Hình học và Đại Số, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

- [1] C. H. Linh, Chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết, Luận án Tiến sĩ Toán học, Đại học Huế, 2006.

Tiếng Đức

- [2] N. T. Cuong, P. Schenzel, and N. V. Trung, Verallgemeinerte Cohen-Macaulay Module, *Math. Nachr.*, **85**, 1978, pp. 57-73.

Tiếng Anh

- [3] S. Ahmad and I. Anwar, An upper bound for the regularity of ideals of Borel type, *Comm. Alg.* **36** (2008), no. 2, 670-673.
- [4] I. Anwar and A. Khalid, Algebraic characterization of graphical degree stability, *Commun. Korean Math. Soc.* **34** (2019), no. 1, 113-125.
- [5] C. Blancafort, On Hilbert functions and cohomology, *J. Algebra* **192** (1997), 439-459.
- [6] M. Brodmann and R. Y. Sharp, *Local cohomology - an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press, 1998.
- [7] W. Bruns and H. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

- [8] G. Castelnuovo, Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica, *Rend. Circ. Math. Palermo* **7** (1893), 89-110.
- [9] M. Cimpoeas, A stable property of Borel type ideals, *Comm. Alg.* **36** (2008), no. 2, 674-677.
- [10] S. D. Cutkosky and H. Srinivasan, An intrinsic criterion for isomorphism of singularities, *Amer. J. Math.* **115** (1993), 789-821.
- [11] S. D. Cutkosky and H. Srinivasan, Equivalence and finite determinacy of mappings, *J. Algebra* **188** (1997), 16-57.
- [12] L. X. Dung and L. T. Hoa, Dependence of Hilbert coefficients, *Manuscripta Math.* **154** (2017), no. 3-4, 551-552.
- [13] P. Eakin and A. Sathaye, Prestable ideals, *J. Algebra* **41** (1976), 439-454.
- [14] D. Eisenbud, Adic approximation of complexes and multiplicities, *Nagoya Math. J.* **54** (1974), 61-67.
- [15] D. Eisenbud and S. Goto, Linear free resolutions and minimal multiplicity, *J. Algebra* **88** (1984), 89-133.
- [16] D. Eisenbud, A. Reeves, and B. Totaro, Initial ideals, Veronese subrings and rates of algebras, *Adv. Math.* **109** (1994), no. 2, 168-187.
- [17] J. Elias, Depth of higher associated graded rings, *J. London Math. Soc.* **70** (2004), no. 1, 41-58.
- [18] J. Elias, On the last Hilbert-Samuel coefficient of isolated singularities, *J. Algebra* **394** (2013), 285-295.
- [19] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, Cohen-Macaulayness versus the vanishing of the first Hilbert coefficient of parameter ideals, *J. London Math. Soc.* **81** (2010), 679-695.

- [20] L. Ghezzi, S. Goto, J. Hong, K. Ozeki, T. T. Phuong, and W. V. Vasconcelos, The Chern and Euler coefficients of modules, *Acta Math. Vietnam.* **40** (2015), 37-60.
- [21] S. Goto and K. Ozeki, Uniform bounds for Hilbert coefficients of parameters, *Contemp. Math.* **555** (2011), 97-118.
- [22] G-M. Greuel and T. H. Pham, Finite determinacy of matrices and ideals, *J. Algebra* **530** (2019), 195-214.
- [23] J. Herzog, D. Popescu, and M. Vladioiu, On the Ext-modules of ideals of Borel type, *Contemp. Math.* **331** (2003), 171-186.
- [24] H. Hironaka, On the equivalence of singularities, in *I. Arithmetical Algebraic Geometry* (Proc. Conf. Purdue Univ, 1963), 153-200, Harper and Row, New York, 1965.
- [25] L. T. Hoa, Reduction numbers and Rees algebra of powers of an ideal, *Proc. Amer. Math. Soc.* **119** (1993), no. 2, 415-422.
- [26] L. T. Hoa, Reduction numbers of equimultiple ideals, *J. Pure Appl. Algebra* **109** (1996), 111-126.
- [27] C. Huneke, The theory of d -sequences and powers of ideals, *Adv. in Math.* **46** (1982), no. 3, 249-279.
- [28] C. Huneke and V. Trivedi, The height of ideals and regular sequences, *Manuscripta Math.* **93** (1997), no. 2, 137-142.
- [29] D. Kirby, Artinian modules and Hilbert polynomials, *Quart. J. Math. Oxford* **24** (1973), 47-57.
- [30] D. Kirby, Dimension and length for Artinian modules, *Quart. J. Math. Oxford* **41** (1990), 419-429.
- [31] C. H. Linh, Upper bound for Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded modules, *Comm. Alg.* **33** (2005), 1817-1831.
- [32] C. H. Linh, Castelnuovo-Mumford regularity and Hilbert coefficients of parameter ideals, *Taiwan. J. Math.* **23** (2019), no. 5, 1115-1131.

- [33] C. H. Linh and T. T. Q. Tan, Bounds for Hilbert coefficients, *Taiwan. J. Math.* **25** (2021), no. 6, 1159-1172.
- [34] C. H. Linh and T. T. Q. Tan, Hilbert coefficients of ideals under perturbation of an ideal, *Hue University Journal of Science: Natural Science* **133** (2024), no. 1B, 125-130.
- [35] C. H. Linh and T. T. Q. Tan, Linear bound for the Hilbert perturbation index, submitted.
- [36] C. H. Linh and V. D. Trung, Hilbert coefficients and the depth of associated graded rings, *Vietnam J. Math.* **47** (2019), no. 2, 431-442.
- [37] L. Ma, P. H. Quy, and I. Smirnov, Filter regular sequence under small perturbations, *Math. Ann.* **378** (2020), no. 1-2, 243-254.
- [38] A. Mafi and D. Naderi, Results on the Hilbert coefficients and reduction numbers, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **129** (2019), no. 60, 1-12.
- [39] M. Mandal, B. Singh, and J. K. Verma, On some conjectures about the Chern numbers of filtration, *J. Algebra* **325** (2011), no. 1, 147-162.
- [40] L. McCune, Hilbert coefficients of parameter ideals, *J. Commut. Algebra* **5** (2013), no. 3, 399-412.
- [41] D. Mumford, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, Ann. of Math. Stud. **59** (1966), Princeton Univ. Press.
- [42] K. Möhring and D. V. Straten, A criterion for the equivalence of formal singularities, *American J. Math.* **124** (2002), 1319-1327.
- [43] A. Ooishi, Matlis duality and the width of a module, *Hiroshima Math. J.* **6** (1976), 573-587.
- [44] A. Ooishi, Castelnuovo-Mumford regularity of graded rings and modules, *Hiroshima Math. J.* **12** (1982), 627-644.

- [45] V. H. J. Perez and T. H. Freitas, Hilbert-Samuel multiplicity and Northcott's inequality relative to an Artinian module, *Int. J. Algebra Comput.* **30** (2020), 379-396.
- [46] T. J. Puthenpurakal, Ratliff-Rush filtration, regularity and depth of higher associated graded modules: Part I, *J. Pure Appl. Algebra* **208** (2007), 159-176.
- [47] T. J. Puthenpurakal, Ratliff-Rush filtration, regularity and depth of higher associated graded modules: Part II, *J. Pure Appl. Algebra* **221** (2017), 611-631.
- [48] P. H. Quy and V. D. Trung, Small perturbations in generalized Cohen-Macaulay local rings, *J. Algebra* **587** (2021), 555-568.
- [49] P. H. Quy and N. V. Trung, When does a perturbation of the equations preserve the normal cone, *Trans. Amer. Math. Soc.* **376** (2023), 4957-4978.
- [50] N. R. Roberts, Krull dimension for Artinian modules over quasi-local commutative rings, *Q. J. Math. Oxford* **26** (1975), 269-273.
- [51] M. E. Rossi, V. D. Trung, and G. Valla, Castelnuovo-Mumford regularity and extended degree, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), no. 5, 1773-1786.
- [52] M. E. Rossi and G. Valla, *Hilbert Functions of Filtered Modules*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana **9** (2010), Springer.
- [53] M. E. Rossi, G. Valla, and W. Vasconcelos, Maximal Hilbert functions, *Results in Math.* **39** (2001), 99-114.
- [54] A. Saikia and K. Saloni, Bounding Hilbert coefficients of parameter ideals, *J. Algebra* **501** (2018), no. 1, 328-344.
- [55] P. Samuel, Algébricité de certains points singuliers algébroides, *J. Math. Pures Appl.* **35** (1956), no. 9, 1-6.

- [56] R. Y. Sharp and A. -J. Taherizadeh, Reductions and integral closures of ideals relative to an Artinian module, *J. London Math. Soc.* **37** (1988), 203-218.
- [57] V. Srinivas and V. Trivedi, The invariance of Hilbert functions of quotients under small perturbations, *J. Algebra* **186** (1996), no. 1, 1-19.
- [58] V. Srinivas and V. Trivedi, A finiteness theorem for the Hilbert functions of complete intersection local rings, *Math. Z.* **225** (1997), no. 4, 543-558.
- [59] V. Srinivas and V. Trivedi, On the Hilbert functions of a Cohen-Macaulay ring, *J. Algebraic Geom.* **6** (1997), 733-751.
- [60] T. T. Q. Tan, Perturbation of Hilbert-Samuel function relative to an Artinian module, *Bull. Korean Math. Soc.* **62** (2025), no. 1, 59-70.
- [61] T. T. Q. Tan, Castelnuovo-Mumford regularity of elimination ideals associated to graphs, submitted.
- [62] Z. Tang and H. Zareki, On Co-Cohen-Macaulay modules and modules of generalized fractions, *Comm. Alg.* **22** (1994), no. 6, 2173-2204.
- [63] V. Trivedi, Finiteness of Hilbert functions for generalized Cohen-Macaulay modules, *Comm. Alg.* **29** (2001), no. 2, 805-813.
- [64] N. V. Trung, Toward a theory of generalized Cohen-Macaulay modules, *Nagoya Math. J.* **102** (1986), 1-49.
- [65] N. V. Trung, Reduction exponent and degree bound for the defining equations of graded rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 229-236.
- [66] N. V. Trung, The Castelnuovo-Mumford regularity of the Rees algebra and the associated graded ring, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), 2813-2832.

- [67] W. Vasconcelos, The homological degree of a module, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), 1167-1179.
- [68] W. Vasconcelos, *Cohomological Degrees of Graded Modules*, Six lectures on commutative algebra, pp. 345-392, Progr. Math. **166**, Birkhauser, Basel, 1998.
- [69] W. Vasconcelos, The Chern coefficients of local rings, *Michigan Math. J.* **57** (2008), 725-743.
- [70] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, Vol. II, Van Nostrand, New York, 1960.

